Física Matemática I - (noturno) - FMA204

Exame 2: 06/07/17

GABARITO

1. (a) Como foi demonstrado no texto, temos para a velocidade das ondas $\nu = \sqrt{\mathfrak{T}/\rho}$. A equação diferencial é

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) - \frac{1}{\nu^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = 0,$$

as condições de contorno são $f(0,t)=0$ e $f(L,t)=0$ para todo t, e as condições iniciais são $f(x,0)=0$ para $0 \leq x \leq L$ e $\dot{f}(x,0)=v_0$ para $0 < x < L$.

(b) Fazendo na equação a substituição $f(x,t)=X(x)T(t)$ temos

$$\begin{aligned}
T(t)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) - \frac{1}{\nu^2}\,X(x)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{1}{X(x)}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) - \frac{1}{\nu^2}\,\frac{1}{T(t)}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} &= \frac{1}{\nu^2}\,\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \Rightarrow \\
\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} &= -\gamma, \\
\frac{1}{\nu^2}\,\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} &= -\gamma,
\end{aligned}$$

onde estamos representando por um ponto a derivada de cada função em relação ao seu argumento, e onde γ é alguma constante, independente de x e de t. Temos portanto a equação para $X(x)$,

$$\ddot{X}(x) + \gamma X(x) = 0,$$

com as condições auxiliares $X(0)=0$ e $X(L)=0$, e a equação para $T(t)$,

$$\ddot{T}(t) + \nu^2 \gamma T(t) = 0,$$

com a condição auxiliar de que $T(t)$ seja uma função limitada e periódica de t.

(c) Para que a solução possa ser nula nas duas pontas do intervalo, é preciso que a equação para $X(x)$ seja elíptica e não hiperbólica, o que significa que devemos ter $\gamma > 0$. A solução geral da equação para $X(x)$ é então

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\gamma}x) + B\sin(\sqrt{\gamma}x)\,.$$

A condição de contorno $X(0)=0$ implica agora que $A=0$, de forma que temos para a solução, a menos de uma constante multiplicativa,

$$X(x) = \sin(\sqrt{\gamma} x)\,.$$

A outra condição de contorno implica agora que $X(L) = 0$, ou seja

$$\sin(\sqrt{\gamma} L) = 0.$$

Para que isto seja verdade é preciso que $\sqrt{\gamma} L = k\pi$, para qualquer k inteiro, o que é possível uma vez que a função seno tem infinitas raízes reais, que se estendem até o infinito. Temos portanto para $X(x)$,

$$X(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Como as soluções para $k < 0$ não são independentes daquelas para $k > 0$, e para $k = 0$ a solução é identicamente nula, e não pode portanto fazer parte de uma base, vemos que podemos nos limitar aos valores de k dados por $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$. Tendo determinado γ, podemos agora resolver a equação para $T(t)$, cuja solução geral é

$$\begin{aligned} T(t) &= A\cos(\sqrt{\gamma}\nu t) + B\sin(\sqrt{\gamma}\nu t) \\ &= A\cos\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right) + B\sin\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right), \end{aligned}$$

que de fato é uma função limitada e periódica. Nossa base de funções consiste portanto de duas coleções de funções, uma com cossenos na parte temporal e uma com senos na parte temporal,

$$\begin{aligned} f_k^{\mathrm{c}}(x,t) &= \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right), \\ f_k^{\mathrm{s}}(x,t) &= \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right). \end{aligned}$$

(d) A solução geral da equação, para um conjunto arbitrário de condições iniciais, pode agora ser escrita nesta base, ou seja como uma superposição das funções da base com coeficientes arbitrários,

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\left[a_k\cos\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right) + b_k\sin\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right)\right],$$

o que implica que temos para a velocidade da corda

$$\dot{f}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\frac{k\pi\nu}{L}\left[-a_k\sin\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right) + b_k\cos\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right)\right].$$

A condição inicial $f(x,0) = 0$ para todo x implica agora que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = 0,$$

para todo x, o que implica que $a_k = 0$ para todo k, pois a expansão da função identicamente nula nesta base é única e corresponde ao caso em que todos os coeficientes se anulam. Temos portanto que

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right), \\ \dot{f}(x,t) &= \frac{\pi\nu}{L} \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right). \end{aligned}$$

A condição inicial $\dot{f}(x,0) = v_0$ para todo x no interior do intervalo implica agora que

$$\frac{L v_0}{\pi\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$

que é a expansão da função constante igual a $Lv_0/(\pi\nu)$ na base de senos de Fourier. Observe-se que trata-se de fato do pulso quadrado de altura $Lv_0/(\pi\nu)$, pois temos imediatamente da expressão de $\dot{f}(x,t)$ que $\dot{f}(0,t) = 0$ e $\dot{f}(L,t) = 0$, para todo t, de forma que $\dot{f}(x,0)$ só é igual a v_0 estritamente no interior do intervalo. Calculando os coeficientes desta expansão temos

$$\begin{aligned} \beta_k &= k b_k \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L dx\, \frac{L v_0}{\pi\nu} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{2 v_0}{\pi\nu} \frac{-L}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \Big[_0^L \\ &= \frac{2 L v_0}{\pi^2 k \nu} \left[1 - \cos(k\pi)\right] \\ &= \frac{2 L v_0}{\pi^2 k \nu} \left[1 - (-1)^k\right]. \end{aligned}$$

vemos aqui que o resultado é nulo para k par, e portanto podemos nos limitar aos valores ímpar $k = 2j + 1$ de k, com $j = 0, 1, 2, \ldots, \infty$. Temos portanto para b_k

$$b_k = \frac{4 L v_0}{\pi^2 k^2 \nu},$$

onde $k = 2j + 1$. Temos portanto para a solução final do problema

$$f(x,t) = \frac{4 L v_0}{\pi^2 \nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right),$$

onde $k = 2j + 1$. Como os coeficientes da série vão a zero como $1/k^2$ para $k \to \infty$, vemos que a série é convergente ponto-a-ponto, e também que é absolutamente e uniformemente convergente.

(e) A solução para a velocidade da corda é dada por

$$\dot{f}(x,t) = \frac{4 v_0}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi\nu t}{L}\right),$$

onde $k = 2j + 1$. Como os coeficientes da série vão a zero monotonicamente como $1/k$ para $k \to \infty$, com passo constante igual a 2 em k (apenas os termos com k ímpar), vemos que a série é convergente ponto-a-ponto, e também que é ela *não* é nem absolutamente convergente nem uniformemente convergente.

2. (a) A equação diferencial é a equação de difusão em uma dimensão,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 0.$$

A condição de contorno em $x = 0$ é $u(0,t) = 0$ para todo t, e em $x = L$ é $u(L,t) = 0$ para todo t. A condição inicial é obtida do problema simples de condução estacionária de calor descrito no enunciado. Para uma placa infinita a solução daquele problema é linear em x, de forma que a condição inicial é uma função linear que vai de $-u_0$ em $x = 0$ até u_0 em $x = L$, ou seja, temos $u(x,0) = u_0(-1 + 2x/L)$ para $x \in (0,L)$.

(b) Fazendo na equação a separação de variáveis $u(x,t) = X(x)T(t)$ temos

$$\begin{aligned}
T(t)\ddot{X}(x) - \frac{1}{\kappa}X(x)\dot{T}(t) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \frac{1}{\kappa}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} &= -\gamma \Rightarrow \\
\ddot{X}(x) + \gamma X(x) &= 0, \\
\dot{T}(t) + \kappa\gamma T(t) &= 0,
\end{aligned}$$

onde as condições de contorno para $X(x)$ são $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$. Examinando a equação para $T(t)$, que tem como solução geral uma exponencial real, verificamos que para que a temperatura não divirja para $\pm\infty$ quanto $t \to \infty$ é preciso que $\gamma > 0$. A mesma condição é necessária para que a equação para $X(x)$ seja elíptica e permita portanto que as condições de contorno em x sejam satisfeitas. Temos portanto $\gamma > 0$, estritamente. As soluções gerais das duas equações diferenciais ordinárias são

$$\begin{aligned}
X(x) &= A\cos(\sqrt{\gamma}x) + B\sin(\sqrt{\gamma}x)\,, \\
T(t) &= Ce^{-\kappa\gamma t}.
\end{aligned}$$

A condição de contorno $X(0) = 0$ implica que $A = 0$, e as constantes restantes são meras constantes de normalização, e são portanto irrelevantes, de forma que temos

$$\begin{aligned}
X(x) &= \sin(\sqrt{\gamma}x)\,, \\
T(t) &= e^{-\kappa\gamma t}.
\end{aligned}$$

A condição de contorno $X(L) = 0$ implica agora, como de hábito, que $\sqrt{\gamma}L = k\pi$, com $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ de forma que temos

$$\begin{aligned}
X(x) &= \sin\left(\pi\frac{kx}{L}\right), \\
T(t) &= e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t}.
\end{aligned}$$

Temos portanto a nossa base de funções

$$u_k(x,t) = \sin\left(\pi\frac{kx}{L}\right)\, e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t},$$

que são soluções da equação e das condições de contorno, para todo $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$.

(c) Como a base acima é completa para estas condições de contorno, podemos escrever a solução em termos da base, obtendo assim

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right)\, e^{-\kappa \frac{\pi^2 k^2}{L^2}\, t}.$$

Como cada um dos elementos da base satisfaz à equação e às condições de contorno nulas, a superposição acima também satisfaz à equação e às condições de contorno, sejam quais forem os coeficientes a_k. Impondo que $u(x,t)$ se reduza à condição inicial para $t = 0$, obtemos a expansão

$$u_0 \left(\frac{2x}{L} - 1\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right),$$

o que nos permite determinar os coeficientes a_k. Como se trata de uma série de senos de Fourier, temos para eles

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{L} \int_0^L dx\, u_0 \left(\frac{2x}{L} - 1\right) \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \\
&= 2u_0 \int_0^L \frac{dx}{L} \left(\frac{2x}{L} - 1\right) \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \\
&= 2u_0 \int_0^1 d\xi\, (2\xi - 1) \sin(\pi k \xi) \\
&= 2u_0 \left[2 \int_0^1 d\xi\, \xi \sin(\pi k \xi) - \int_0^1 d\xi\, \sin(\pi k \xi)\right] \\
&= 2u_0 \left[-\frac{2}{\pi k}\, \xi \cos(\pi k \xi) \left[_0^1 + \frac{2}{\pi k} \int_0^1 d\xi\, \cos(\pi k \xi) + \frac{1}{\pi k} \cos(\pi k \xi) \left[_0^1\right.\right.\right] \\
&= 2u_0 \left[-\frac{2}{\pi k} \cos(\pi k) + \frac{2}{\pi^2 k^2} \sin(\pi k \xi) \left[_0^1 + \frac{1}{\pi k} \cos(\pi k) - \frac{1}{\pi k}\right.\right] \\
&= 2u_0 \left[-\frac{1}{\pi k} \cos(\pi k) + \frac{2}{\pi^2 k^2} \sin(\pi k) - \frac{1}{\pi k}\right] \\
&= -\frac{2u_0}{\pi k} \left[\cos(\pi k) + 1\right] \\
&= -\frac{2u_0}{\pi k} \left[1 + (-1)^k\right],
\end{aligned}$$

onde usamos a variável $\xi = x/L$ e integramos por partes. O fator entre chaves é nulo para k ímpar, de forma que temos apenas os valores par $k = 2j$ de k. Temos portanto para os coeficientes,

$$\begin{aligned}
a_k &= -\frac{4u_0}{\pi k} \\
&= -\frac{2u_0}{\pi j},
\end{aligned}$$

onde $k = 2j$, o que é compatível com uma função descontínua como é o caso para a nossa condição inicial. Temos portanto para a solução completa $u(x,t)$ do problema

$$u(x,t) = -\frac{2u_0}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\,\sin\!\left(2\pi\frac{jx}{L}\right)\,e^{-\kappa\frac{4\pi^2 j^2}{L^2}\,t}.$$

Esta série é uniformemente convergente para todo $t > 0$, mas apenas simplesmente convergente para $t = 0$.

(d) Calculando a densidade de fluxo de calor $\vec{\jmath}(x,t)$ temos

$$\begin{aligned}
\vec{\jmath}(x,t) &= -K\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\,\hat{x} \\
&= \frac{2u_0K}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\,\frac{\partial}{\partial x}\sin\!\left(2\pi\frac{jx}{L}\right)\,e^{-\kappa\frac{4\pi^2 j^2}{L^2}\,t}\,\hat{x} \\
&= \left[\frac{4u_0K}{L}\sum_{j=1}^{\infty}\cos\!\left(2\pi\frac{jx}{L}\right)\,e^{-\kappa\frac{4\pi^2 j^2}{L^2}\,t}\right]\hat{x}.
\end{aligned}$$

A série é uniformemente convergente para todo $t > 0$, mas para $t = 0$ ela diverge. A divergência com cossenos e coeficientes unitários é aquela típica da “função” delta de Dirac. Como as duas superfícies têm normais da direção de $\hat{x}$, que é a mesma direção de $\vec{\jmath}(x,t)$, o produto escalar é igual à componente x de $\vec{\jmath}(x,t)$. Como nada depende de y ou z, a integral que dá o fluxo total de calor $J(t)$ sobre uma das superfícies é igual ao produto escalar multiplicado pela área, que é unitária. Para a superfície em $x = 0$ trata-se do calor que *entra* na placa, e para a superfície em $x = L$ trata-se do calor que *sai* da placa. Temos em cada caso

$$\begin{aligned}
J_0(t) &= \frac{4u_0K}{L}\sum_{j=1}^{\infty}e^{-\kappa\frac{4\pi^2 j^2}{L^2}\,t}, \\
J_L(t) &= \frac{4u_0K}{L}\sum_{j=1}^{\infty}e^{-\kappa\frac{4\pi^2 j^2}{L^2}\,t},
\end{aligned}$$

uma vez que $\cos(0) = 1 = \cos(2\pi k)$. Observe-se que exatamente a mesma quantidade de calor entre e sai da placa, de forma que o conteúdo de calor da placa não muda ao longo do tempo. As séries continuam uniformemente convergentes para todo $t > 0$, e divergentes para $t = 0$. Para $t = 0$ estas séries divergem para o infinito positivo, indicando os pontos singulares de uma “função” delta de Dirac.

(e) Para calcular a quantidade total de calor $Q(t)$ que atravessa uma dada superfície até o tempo t devemos integrar $J(t)$ ao longo do tempo. Temos portanto, para uma superfície localizada numa posição x qualquer entre 0 e L,

$$\begin{aligned}
J_x(t) &= \frac{4u_0K}{L}\sum_{j=1}^{\infty}\cos\!\left(2\pi\frac{jx}{L}\right)\,e^{-\kappa\frac{4\pi^2 j^2}{L^2}\,t} \Rightarrow \\
Q_x(t) &= \int_0^t dt'\,J_x(t') \\
&= \frac{4u_0K}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\!\left(2\pi\frac{jx}{L}\right)\int_0^t dt'\,e^{-\kappa\frac{4\pi^2 j^2}{L^2}\,t'}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{u_0 K L}{\kappa \pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cos\left(2\pi \frac{jx}{L}\right) e^{-\kappa \frac{4\pi^2 j^2}{L^2} t'} \Big[_0^t \\
&= \frac{u_0 K L}{\kappa \pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cos\left(2\pi \frac{jx}{L}\right) \left(1 - e^{-\kappa \frac{4\pi^2 j^2}{L^2} t}\right).
\end{aligned}
$$

Observe-se que a série é agora uniformemente convergente para qualquer valor de $t \geq 0$. Aplicando isto em $x = 0$ e $x = L$ temos

$$
\begin{aligned}
Q_0(t) &= \frac{u_0 K L}{\kappa \pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \left(1 - e^{-\kappa \frac{4\pi^2 j^2}{L^2} t}\right), \\
Q_L(t) &= \frac{u_0 K L}{\kappa \pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \left(1 - e^{-\kappa \frac{4\pi^2 j^2}{L^2} t}\right),
\end{aligned}
$$

onde usamos mais uma vez os fatos de que $\cos(0) = 1 = \cos(2\pi k)$. Vemos que estas duas série são uniformemente convergentes para todo $t \geq 0$, devido ao fator de $1/j^2$.

3. Fazemos a mudança de variáveis $u_0 = u_2 - u_1$ e $u(x, y, t) = u'(x, y, t) + u_1$.

   (a) A equação diferencial é a equação de difusão em duas dimensões,

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 u(x, y, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) &= 0 \Rightarrow \\
\nabla^2 u'(x, y, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} u'(x, y, t) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} u'(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u'(x, y, t) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} u'(x, y, t) &= 0.
\end{aligned}
$$

   As condições de contorno, em termos de $u'(x, y, t)$, são dadas por

$$
\begin{aligned}
u'(0, y, t) &= 0, \\
u'(L, y, t) &= 0, \\
u'(x, 0, t) &= 0, \\
u'(x, L, t) &= 0.
\end{aligned}
$$

   (b) Fazendo na equação para $u'(x, y, t)$ a separação de variáveis $u_b(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ temos

$$
\begin{aligned}
Y(y)T(t)\ddot{X}(x) + X(x)T(t)\ddot{Y}(y) - \frac{1}{\kappa} X(x)Y(y)\dot{T}(t) &= 0 \Rightarrow \\
\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} + \frac{\ddot{Y}(y)}{Y(y)} = \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} &= -\gamma \Rightarrow \\
\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} + \frac{\ddot{Y}(y)}{Y(y)} &= -\gamma, \\
\dot{T}(t) + \kappa\gamma T(t) &= 0,
\end{aligned}
$$

   onde as condições de contorno para $X(x)$ são $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$, e as condições de contorno para $Y(y)$ são $Y(0) = 0$ e $Y(L) = 0$. Como temos um problema de relaxamento térmico, o caso $\gamma = 0$ está descartado. Examinando a equação para $T(t)$, que tem como solução geral uma exponencial real, verificamos que para que a temperatura não divirja para $\pm\infty$ quanto $t \to \infty$ é preciso que $\gamma > 0$. É preciso agora continuar a separação de variáveis para x e y. Fazendo isto temos

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} &= -\lambda_x,\\ \frac{\ddot{Y}(y)}{Y(y)} &= -\lambda_y,\end{aligned}$$

onde $\lambda_x + \lambda_y = \gamma$. Para que as equações para $X(x)$ e para $Y(y)$ sejam elípticas e permitam portanto que as condições de contorno em x e y sejam satisfeitas, é preciso que $\lambda_x > 0$ e $\lambda_y > 0$, estando descartados portanto os casos $\lambda_x = 0$ e $\lambda_y = 0$. Temos portanto nosso conjunto de equações diferenciais ordinárias,

$$\begin{aligned}\ddot{X}(x) + \lambda_x X(x) &= 0,\\ \ddot{Y}(y) + \lambda_y Y(y) &= 0,\\ \dot{T}(t) + \kappa\gamma T(t) &= 0,\end{aligned}$$

onde $\lambda_x + \lambda_y = \gamma$, $\gamma > 0$, $\lambda_x > 0$ e $\lambda_y > 0$.

(c) As soluções gerais das três equações diferenciais ordinárias são

$$\begin{aligned}X(x) &= A\cos\left(\sqrt{\lambda_x}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda_x}x\right),\\ Y(y) &= C\cos\left(\sqrt{\lambda_y}y\right) + D\sin\left(\sqrt{\lambda_y}y\right),\\ T(t) &= E\, e^{-\kappa\gamma\, t}.\end{aligned}$$

A condição de contorno $X(0) = 0$ implica que $A = 0$, a condição de contorno $Y(0) = 0$ implica que $C = 0$, e as constantes restantes são meras constantes de normalização, sendo portanto irrelevantes, de forma que temos

$$\begin{aligned}X(x) &= \sin\left(\sqrt{\lambda_x}x\right),\\ Y(y) &= \sin\left(\sqrt{\lambda_y}y\right),\\ T(t) &= e^{-\kappa\gamma\, t}.\end{aligned}$$

A condição de contorno $X(L) = 0$ implica agora, como de hábito, que $\sqrt{\lambda_x}L = k_x\pi$, com $k_x = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, e similarmente para $Y(L) = 0$, que implica que $\sqrt{\lambda_y}L = k_y\pi$, com $k_y = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, de forma que temos, lembrando que $\gamma = \lambda_x + \lambda_y$,

$$\begin{aligned}X(x) &= \sin\left(\pi\frac{k_x x}{L}\right),\\ Y(y) &= \sin\left(\pi\frac{k_y y}{L}\right),\\ T(t) &= e^{-\kappa\frac{\pi^2\left(k_x^2 + k_y^2\right)}{L^2}\, t}.\end{aligned}$$

Temos portanto a nossa base de funções

$$u_{k_x k_y}(x,y,t) = \sin\!\left(\pi\frac{k_x x}{L}\right)\sin\!\left(\pi\frac{k_y y}{L}\right) e^{-\kappa\frac{\pi^2\left(k_x^2+k_y^2\right)}{L^2}t},$$

que são soluções da equação diferencial parcial e das condições de contorno, para todo $k_x = 1,2,3,\ldots,\infty$ e para todo $k_y = 1,2,3,\ldots,\infty$. Como a base acima é completa para estas condições de contorno, podemos escrever a solução do problema em termos da base, obtendo assim

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= u'(x,y,t) + u_1, \\ u'(x,y,t) &= \sum_{k_x=1}^{\infty}\sum_{k_y=1}^{\infty} \beta_{k_x k_y}\sin\!\left(\pi\frac{k_x x}{L}\right)\sin\!\left(\pi\frac{k_y y}{L}\right) e^{-\kappa\frac{\pi^2\left(k_x^2+k_y^2\right)}{L^2}t}. \end{aligned}$$

Como cada um dos elementos da base satisfaz à equação e às condições de contorno nulas, a superposição acima também satisfaz à equação e às condições de contorno, sejam quais forem os coeficientes $\beta_{k_x k_y}$. Impondo que $u(x,y,t)$ se reduza à condição inicial para $t = 0$, obtemos a expansão

$$\begin{aligned} u'(x,y,0) &= u_0 \Rightarrow \\ u_0 &= \sum_{k_x=1}^{\infty}\sum_{k_y=1}^{\infty} \beta_{k_x k_y}\sin\!\left(\pi\frac{k_x x}{L}\right)\sin\!\left(\pi\frac{k_y y}{L}\right), \end{aligned}$$

o que nos permite determinar os coeficientes $\beta_{k_x k_y}$. Como se trata de uma série de senos de Fourier dupla, temos para eles

$$\begin{aligned} \beta_{k_x k_y} &= \frac{4}{L^2}\int_0^L dx\int_0^L dy\, u_0 \sin\!\left(\pi\frac{k_x x}{L}\right)\sin\!\left(\pi\frac{k_y y}{L}\right) \\ &= 4u_0\int_0^L \frac{dx}{L}\int_0^L \frac{dy}{L}\, \sin\!\left(\pi\frac{k_x x}{L}\right)\sin\!\left(\pi\frac{k_y y}{L}\right) \\ &= 4u_0\int_0^1 d\xi_x\int_0^1 d\xi_y\, \sin(\pi k_x \xi_x)\sin(\pi k_y \xi_y) \\ &= 4u_0\left[\int_0^1 d\xi_x\, \sin(\pi k_x \xi_x)\right]\left[\int_0^1 d\xi_y\, \sin(\pi k_y \xi_y)\right] \\ &= 4u_0\left[\frac{-1}{\pi k_x}\cos(\pi k_x \xi_x)\,\Big|_0^1\right]\left[\frac{-1}{\pi k_y}\cos(\pi k_y \xi_y)\,\Big|_0^1\right] \\ &= \frac{4u_0}{\pi^2 k_x k_y}\left[1-(-1)^{k_x}\right]\left[1-(-1)^{k_y}\right], \end{aligned}$$

onde usamos as variáveis $\xi_x = x/L$ e $\xi_y = y/L$. Os dois fatores entre chaves se anulam para k_x ou k_y par, de forma que temos apenas os valores ímpar dos dois coeficientes, com $k_x = 2j_x + 1$ e $k_y = 2j_y + 1$. Temos portanto para os coeficientes,

$$\beta_{k_x k_y} = \frac{16u_0}{\pi^2 k_x k_y},$$

onde $k_x = 2j_x + 1$ e $k_y = 2j_y + 1$, o que é compatível com uma função descontínua como é o caso para a nossa condição inicial, se levarmos em consideração que temos aqui uma série dupla, com dois índices de soma. Temos portanto para $u(x, y, t)$

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= u'(x,y,t) + u_1, \\
u'(x,y,t) &= \frac{16u_0}{\pi^2} \sum_{j_x=0}^{\infty} \sum_{j_y=0}^{\infty} \frac{1}{k_x k_y} \sin\left(\pi \frac{k_x x}{L}\right) \sin\left(\pi \frac{k_y y}{L}\right) e^{-\kappa \frac{\pi^2 \left(k_x^2 + k_y^2\right)}{L^2} t},
\end{aligned}
$$

onde $k_x = 2j_x + 1$ e $k_y = 2j_y + 1$.

(d) Esta série dupla é uniformemente convergente para todo $t > 0$, mas apenas simplesmente convergente para $t = 0$. Observe-se que, devido à estrutura dos coeficientes que obtivemos neste caso simples, se separarmos a exponencial no produto de duas exponenciais, uma envolvendo apenas k_x e outra apenas k_y, podemos facilmente escrever esta série bidimensional como o produto de duas séries unidimensionais,

$$
u'(x,y,t) = \frac{16u_0}{\pi^2} \left[\sum_{j_x=0}^{\infty} \frac{1}{k_x} \sin\left(\pi \frac{k_x x}{L}\right) e^{-\kappa \frac{\pi^2 k_x^2}{L^2} t} \right] \left[\sum_{j_y=0}^{\infty} \frac{1}{k_y} \sin\left(\pi \frac{k_y y}{L}\right) e^{-\kappa \frac{\pi^2 k_y^2}{L^2} t} \right],
$$

onde $k_x = 2j_x + 1$ e $k_y = 2j_y + 1$. Desta forma, neste caso simples as questões de convergência da série completa podem ser reduzidas às questões de convergência de cada uma destas duas séries unidimensionais. Em resumo, temos convergência simples em todo o interior da barra, para $t \geq 0$, e convergência uniforme em todo o interior da barra, para $t > 0$.

(e) Para $x = y = L/2$ os senos na expressão acima passam ambos a ser simplesmente $\sin(\pi k/2)$, que é igual a $(-1)^j$ uma vez que $k = 2j + 1$ é ímpar, ou seja, temos neste caso o fator $(-1)^{j_x + j_y}$, e obtemos desta forma o resultado

$$
\begin{aligned}
u(L/2,L/2,t) &= u'(L/2,L/2,t) + u_1, \\
u'(L/2,L/2,t) &= \frac{16u_0}{\pi^2} \sum_{j_x=0}^{\infty} \sum_{j_y=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j_x+j_y}}{k_x k_y} e^{-\kappa \frac{\pi^2 \left(k_x^2 + k_y^2\right)}{L^2} t},
\end{aligned}
$$

onde $k_x = 2j_x + 1$ e $k_y = 2j_y + 1$. A série continua sendo uniformemente convergente para todo $t > 0$, e apenas simplesmente convergente para $t = 0$. Como antes, ela pode ser separada no produto de duas séries unidimensionais, que neste caso se reduz ao quadrado de uma única série unidimensional,

$$
\begin{aligned}
u'(L/2,L/2,t) &= u_0 \left[\frac{4}{\pi} \sum_{j_x=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j_x}}{k_x} e^{-\kappa \frac{\pi^2 k_x^2}{L^2} t} \right] \left[\frac{4}{\pi} \sum_{j_y=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j_y}}{k_y} e^{-\kappa \frac{\pi^2 k_y^2}{L^2} t} \right] \\
&= u_0 \left[\frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j}}{k} e^{-\kappa \frac{\pi^2 k^2}{L^2} t} \right]^2,
\end{aligned}
$$

onde $k = 2j + 1$.

4. (a) A equação diferencial é a equação de difusão em uma dimensão,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 0.$$

A condição de contorno em $x = 0$ é $u(0,t) = -u_0$ para todo t, e em $x = L$ é $u(L,t) = u_0$ para todo t. A condição inicial é $u(x,0) = 0$ para $x \in (0,L)$. Fazendo na equação a separação de variáveis $u_b(x,t) = X(x)T(t)$ temos

$$\begin{aligned} T(t)\ddot{X}(x) - \frac{1}{\kappa}X(x)\dot{T}(t) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \frac{1}{\kappa}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} &= -\gamma \Rightarrow \\ \ddot{X}(x) + \gamma X(x) &= 0, \\ \dot{T}(t) + \kappa\gamma T(t) &= 0, \end{aligned}$$

onde as condições de contorno para $X(x)$ são $X(0) = -u_0$ e $X(L) = u_0$. Como estas condições de contorno não são homogêneas, devemos começar por procurar a solução de condução estacionária de calor, o que corresponde a examinar o caso $\gamma = 0$. Neste caso temos que T é constante, e que $\ddot{X}(x) = 0$, que tem como solução geral $X(x) = A + Bx$. A condição de contorno $X(0) = -u_0$ implica agora que $A = -u_0$, e a condição de contorno $X(L) = u_0$ implica que $B = 2u_0/L$, de forma que temos a solução estacionária

$$u_s(x) = u_0\left(-1 + 2\frac{x}{L}\right).$$

A nova função-variável é $u'(x,t) = u(x,t) - u_s(x)$. Como tanto $u(x,t)$ quanto $u_s(x)$ satisfazem à equação diferencial, que é linear, segue que $u'(x,t)$ também satisfaz à equação. Como tanto $u(x,t)$ quanto $u_s(x)$ satisfazem às mesmas condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$, ou seja $u(0,t) = u_s(0) = u_0$ para todo t e $u(L,t) = u_s(L) = 0$ para todo t, segue que $u'(x,t)$ satisfaz a condições de contorno nulas, $u'(0,t) = 0$ e $u'(L,t) = 0$ para todo t. A condição inicial que $u'(x,t)$ satisfaz é facilmente calculada,

$$\begin{aligned} u'(x,0) &= u(x,0) - u_s(x) \\ &= 0 - u_0\left(-1 + 2\frac{x}{L}\right) \\ &= u_0\left(1 - 2\frac{x}{L}\right). \end{aligned}$$

Trata-se de uma função linear decrescente que começa em u_0 e vai até $-u_0$.

(b) A separação de variáveis $u'_b(x,t) = X(x)T(t)$ é de fato a mesma de antes, e resulta portanto em

$$\begin{aligned} \ddot{X}(x) + \gamma X(x) &= 0, \\ \dot{T}(t) + \kappa\gamma T(t) &= 0, \end{aligned}$$

onde as condições de contorno para $X(x)$ são agora nulas, $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$. Como temos agora um problema de relaxamento térmico, o caso $\gamma = 0$ está descartado. Examinando a equação para $T(t)$, que tem como solução geral uma exponencial real, verificamos que para que a temperatura não divirja para $\pm\infty$ quanto $t \to \infty$ é preciso que $\gamma > 0$.

A mesma condição é necessária para que a equação para $X(x)$ seja elíptica e permita portanto que as condições de contorno em x sejam satisfeitas. Temos portanto $\gamma > 0$, estritamente. As soluções gerais das duas equações diferenciais ordinárias são

$$\begin{aligned} X(x) &= A\cos(\sqrt{\gamma}x) + B\sin(\sqrt{\gamma}x)\,, \\ T(t) &= Ce^{-\kappa\gamma t}. \end{aligned}$$

A condição de contorno $X(0) = 0$ implica que $A = 0$, e as constantes restantes são meras constantes de normalização, e são portanto irrelevantes, de forma que temos

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin(\sqrt{\gamma}x)\,, \\ T(t) &= e^{-\kappa\gamma t}. \end{aligned}$$

A condição de contorno $X(L) = 0$ implica agora, como de hábito, que $\sqrt{\gamma}L = k\pi$, com $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ de forma que temos

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \\ T(t) &= e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t}. \end{aligned}$$

Temos portanto a nossa base de funções

$$u_k(x,t) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\, e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t},$$

que são soluções da equação e das condições de contorno, para todo $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$.

(c) Como a base acima é completa para estas condições de contorno, podemos escrever a solução do problema de relaxamento térmico em termos da base, obtendo assim

$$u'(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\, e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t}.$$

Como cada um dos elementos da base satisfaz à equação e às condições de contorno nulas, a superposição acima também satisfaz à equação e às condições de contorno, sejam quais forem os coeficientes a_k. Impondo que $u'(x,t)$ se reduza à condição inicial para $t = 0$, obtemos a expansão

$$u_0\left(1 - 2\frac{x}{L}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$

o que nos permite determinar os coeficientes a_k. Como se trata de uma série de senos de Fourier, temos para eles

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{L}\int_0^L dx\, u_0\left(1 - 2\frac{x}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &= 2u_0\int_0^L \frac{dx}{L}\,\left(1 - 2\frac{x}{L}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2u_0 \int_0^1 d\xi\,(1-2\xi)\sin(\pi k\xi) \\
&= -2u_0\left[2\int_0^1 d\xi\,\xi\sin(\pi k\xi) - \int_0^1 d\xi\,\sin(\pi k\xi)\right] \\
&= -2u_0\left[-\frac{2}{\pi k}\,\xi\cos(\pi k\xi)\,\Big[_0^1 + \frac{2}{\pi k}\int_0^1 d\xi\,\cos(\pi k\xi) + \frac{1}{\pi k}\,\cos(\pi k\xi)\,\Big[_0^1\right] \\
&= -2u_0\left[-\frac{2}{\pi k}\,\cos(\pi k) + \frac{2}{\pi^2 k^2}\,\sin(\pi k\xi)\,\Big[_0^1 + \frac{1}{\pi k}\,\cos(\pi k) - \frac{1}{\pi k}\right] \\
&= 2u_0\left[\frac{1}{\pi k}\,\cos(\pi k) + \frac{1}{\pi k}\right] \\
&= \frac{2u_0}{\pi k}\,[1+\cos(\pi k)]\,,
\end{aligned}
$$

onde usamos a variável $\xi = x/L$ e integramos por partes. O termo entre chaves é nulo para k ímpar, de forma que temos apenas $k = 2j$, com $j = 1, 2, 3, \ldots$. Temos portanto para os coeficientes,

$$
a_k = \frac{4u_0}{\pi k},
$$

onde $k = 2j$, o que é compatível com uma função descontínua como é o caso para a nossa condição inicial. Temos portanto para $u'(x,t)$

$$
u'(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\sin\!\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,e^{-\kappa\frac{\pi^2 k^2}{L^2}\,t},
$$

onde $k = 2j$, e para a solução completa $u(x,t) = u_s(x) + u'(x,t)$ do problema

$$
u(x,t) = u_0\left(-1 + 2\frac{x}{L}\right) + \frac{4u_0}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\sin\!\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,e^{-\kappa\frac{\pi^2 k^2}{L^2}\,t},
$$

onde $k = 2j$. A série é uniformemente convergente para todo $t > 0$, e apenas simplesmente convergente para $t = 0$.

(d) Calculando a densidade de fluxo de calor $\vec{\jmath}(x,t)$ temos

$$
\begin{aligned}
\vec{\jmath}(x,t) &= -K\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\,\hat{x} \\
&= -u_0 K\frac{\partial}{\partial x}\left(-1 + 2\frac{x}{L}\right)\,\hat{x} - \frac{4u_0 K}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\frac{\partial}{\partial x}\sin\!\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,e^{-\kappa\frac{\pi^2 k^2}{L^2}\,t}\,\hat{x} \\
&= \left[-\frac{2u_0 K}{L} - \frac{4u_0 K}{L}\sum_{j=1}^{\infty}\cos\!\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,e^{-\kappa\frac{\pi^2 k^2}{L^2}\,t}\right]\hat{x}.
\end{aligned}
$$

A série é uniformemente convergente para todo $t > 0$, mas para $t = 0$ ela diverge. A divergência com cossenos e coeficientes unitários é aquela típica da "função" delta de Dirac. Como as duas superfícies mencionadas têm normais da direção de $\hat{x}$, que é a mesma direção de $\vec{\jmath}(x,t)$, o produto escalar é igual à componente x de $\vec{\jmath}(x,t)$. Como nada depende de y ou z, a integral que dá o fluxo total de calor $J(t)$ sobre uma das superfícies é igual ao produto escalar multiplicado pela área, que é unitária. Para a superfície em $x=0$ trata-se do calor que sai da placa, e para a superfície em $x=L$ trata-se do calor que entra na placa. Temos em cada caso

$$\begin{aligned} J_0(t) &= -\frac{2u_0K}{L} - \frac{4u_0K}{L}\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t}, \\ J_L(t) &= -\frac{2u_0K}{L} - \frac{4u_0K}{L}\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t}, \end{aligned}$$

uma vez que $\cos(0)=1$ e $\cos(\pi k)=1$ pois $k=2j$.

(e) Para calcular a quantidade total de calor $Q(t)$ que atravessa uma dada superfície até o tempo t devemos integrar $J(t)$ ao longo do tempo. Temos portanto, para uma superfície localizada em uma posição x qualquer,

$$\begin{aligned} J_x(t) &= -\frac{2u_0K}{L} - \frac{4u_0K}{L}\sum_{j=1}^{\infty}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t} \Rightarrow \\ Q_x(t) &= \int_0^t dt'\, J_x(t') \\ &= -\int_0^t dt'\,\frac{2u_0K}{L} - \frac{4u_0K}{L}\sum_{j=1}^{\infty}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\int_0^t dt'\, e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t'} \\ &= -\frac{2u_0K}{L}t + \frac{4u_0KL}{\kappa\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t'}\Big[_0^t \\ &= -\frac{2u_0K}{L}t - \frac{4u_0KL}{\kappa\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\left[1-e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t}\right]. \end{aligned}$$

Observe-se que a série é agora uniformemente convergente para qualquer valor de $t\geq 0$. Aplicando isto em $x=0$ e $x=L$ temos

$$\begin{aligned} Q_0(t) &= -\frac{2u_0K}{L}t - \frac{4u_0KL}{\kappa\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left[1-e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t}\right], \\ Q_L(t) &= -\frac{2u_0K}{L}t - \frac{4u_0KL}{\kappa\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left[1-e^{-\kappa\frac{\pi^2k^2}{L^2}t}\right], \end{aligned}$$

onde usamos mais uma vez os fatos de que $\cos(0)=1$ e de que $\cos(\pi k)=1$ pois $k=2j$. Como se vê acima, temos que $Q_0(t)=Q_L(t)$ para todo t, e como o calor total $\Delta Q(t)$ trocado com os banhos térmicos é a diferença destas duas quantidades, segue que temos $\Delta Q(t)=0$ para todo t.

5. (a) A equação diferencial é a equação de Laplace em duas dimensões,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,y) = 0,$$

e as condições de contorno são

$$\begin{aligned}
\phi(0,y) &= 0, \text{ para } -L<y<L, \\
\phi(L,y) &= 0, \text{ para } -L<y<L, \\
\phi(x,L) &= V_0, \text{ para } 0<x<L, \\
\phi(x,-L) &= V_0, \text{ para } 0<x<L.
\end{aligned}$$

(b) Fazendo na equação a separação de variáveis $X(x)Y(y)$ obtemos, como foi visto no texto, o par de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)+\gamma X(x) &= 0, \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y)-\gamma Y(y) &= 0,
\end{aligned}$$

As condições auxiliares sobre $X(x)$ são $X(0)=0$ e $X(L)=0$, e a condição auxiliar sobre $Y(y)$ é que as soluções sejam simétricas por troca de sinal do y, ou seja, que sejam funções par em y, $Y(-y)=Y(y)$. Como temos condições de contorno nulas de Dirichlet em x, é conveniente que a equação em x seja elíptica, de forma que escolhemos $\gamma>0$. Note-se que o caso $\gamma=0$ está eliminado, pois não faz parte da base dos senos de Fourier em x.

(c) As soluções gerais das duas equações diferenciais ordinárias são

$$\begin{aligned}
X(x) &= A\cos(\sqrt{\gamma}x)+B\sin(\sqrt{\gamma}x)\,, \\
Y(y) &= C\cosh(\sqrt{\gamma}y)+D\sinh(\sqrt{\gamma}y)\,.
\end{aligned}$$

A condição de contorno $X(0)=0$ implica que $A=0$, a condição de paridade sobre $Y(y)$ implica que $D=0$, e as constantes restantes são meras constantes de normalização, sendo portanto irrelevantes, de forma que temos

$$\begin{aligned}
X(x) &= \sin(\sqrt{\gamma}x)\,, \\
Y(y) &= \cosh(\sqrt{\gamma}y)\,.
\end{aligned}$$

A condição de contorno $X(L)=0$ implica agora que $\sqrt{\gamma}L=k\pi$, com $k=1,2,3,\ldots,\infty$, de forma que temos

$$\begin{aligned}
X(x) &= \sin\left(\pi\frac{kx}{L}\right), \\
Y(y) &= \cosh\left(\pi\frac{ky}{L}\right).
\end{aligned}$$

Temos portanto a nossa base de funções

$$\phi_k(x,y)=\sin\left(\pi\frac{kx}{L}\right)\cosh\left(\pi\frac{ky}{L}\right),$$

que são soluções da equação diferencial parcial e das condições de contorno nas duas paredes onde o potencial é nulo, para todo $k=1,2,3,\ldots,\infty$. Além disso, elas têm a paridade correta em y, como exigido pelas simetrias do problema.

(d) Como a base acima é completa para estas condições de contorno, podemos escrever a solução do problema em termos da base, obtendo assim

$$\phi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \cosh\left(\pi \frac{ky}{L}\right).$$

Como cada um dos elementos da base satisfaz à equação diferencial e às condições de contorno nas duas paredes onde o potencial é nulo, a superposição acima também satisfaz à equação e a estas mesmas duas condições de contorno, sejam quais forem os coeficientes β_k. O mesmo pode ser dito em relação à paridade da solução em relação a y. Observe-se que tanto faz impor a condição de contorno restante sobre a parede de cima, com $y = L$, quanto sobre a parede de baixo, com $y = -L$. Como estas duas condições de contorno são simétricas, e a solução geral foi construída com esta mesma simetria, uma vez imposta uma das duas a outra estará automaticamente satisfeita. Impondo que $\phi(x,y)$ se reduza à condição de contorno na parede de cima, obtemos a expansão

$$\phi(x,L) = V_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \cosh(\pi k),$$

o que nos permite determinar os coeficientes β_k. Como o cosseno hiperbólico depende agora apenas de k e não mais das coordenadas, o que temos aqui é uma série de senos de Fourier em x, com coeficientes dados por

$$\beta'_k = \beta_k \cosh(\pi k).$$

Como se trata de uma série de senos de Fourier, temos para estes coeficientes

$$\begin{aligned} \beta'_k &= \frac{2}{L} \int_0^L dx\, V_0 \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \\ &= 2V_0 \int_0^L d\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \\ &= 2V_0 \int_0^1 d\xi\ \sin(\pi k \xi), \end{aligned}$$

onde usamos a variável $\xi = x/L$. A integral pode agora ser feita diretamente, e obtemos assim

$$\begin{aligned} \beta'_k &= 2V_0 \frac{(-1)}{\pi k} \cos(\pi k \xi) \Big[_0^1 \\ &= \frac{2V_0}{\pi k} [1 - \cos(\pi k)]. \end{aligned}$$

O fator entre chaves se anula para k par, de forma que temos apenas os valores ímpar de k, com $k = 2j + 1$. Recordando a relação entre β_k e β'_k, temos portanto para os coeficientes,

$$\beta_k = \frac{4V_0}{\pi} \frac{1}{k \cosh(\pi k)},$$

onde $k = 2j + 1$, o que é compatível com uma função descontínua como é o caso para a nossa condição de contorno na parede superior. Temos portanto para a solução completa $\phi(x, y)$

$$\phi(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \frac{\cosh\left(\pi \frac{ky}{L}\right)}{\cosh(\pi k)},$$

onde $k = 2j + 1$. Para qualquer $|y| < L$ os cossenos hiperbólicos implementam um decaimento exponencial dos coeficientes com k, de forma que a série é uniformemente convergente, e admite que a diferenciemos termo-a-termo qualquer número de vezes. O fator de $1/k$ garante que a série ainda é convergente mesmo nas paredes superior e inferior, onde $|y| = L$, mas neste caso a convergência não é uniforme e não podemos diferenciar a série termo-a-termo. Calculando as componentes cartesianas do gradiente $\vec{\nabla}\phi(x, y)$ temos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\phi(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)\,\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)\,\hat{y} \\
&= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{\cosh\left(\pi \frac{ky}{L}\right)}{\cosh(\pi k)} \frac{\partial}{\partial x} \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \hat{x} \right. \\
&\qquad \left. + \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \frac{\frac{\partial}{\partial y} \cosh\left(\pi \frac{ky}{L}\right)}{\cosh(\pi k)} \hat{y} \right] \\
&= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{\pi k}{L} \frac{\cosh\left(\pi \frac{ky}{L}\right)}{\cosh(\pi k)} \cos\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \hat{x} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\pi k}{L} \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \frac{\sinh\left(\pi \frac{ky}{L}\right)}{\cosh(\pi k)} \hat{y} \right].
\end{aligned}$$

Temos portanto para as duas componentes cartesianas, simplificando as duas expressões,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) &= \frac{4V_0}{L} \sum_{j=0}^{\infty} \cos\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \frac{\cosh\left(\pi \frac{ky}{L}\right)}{\cosh(\pi k)}, \\
\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) &= \frac{4V_0}{L} \sum_{j=0}^{\infty} \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \frac{\sinh\left(\pi \frac{ky}{L}\right)}{\cosh(\pi k)}.
\end{aligned}$$

Estas duas séries são uniformemente convergentes para todo $|y| < L$, devido às funções hiperbólicas, e permitem que tomemos qualquer número de derivadas termo-a-termo. Para $|y| = L$, entretanto, elas são divergentes, e a componente x adquire o caráter de uma "função" delta de Dirac com singularidades nos dois cantos de cima da caixa. Há também, é claro, correspondentes singularidades nos dois cantos de baixo.

(e) Resumindo as discussões de convergência feitas nos itens anteriores, temos que a situação das séries em relação à convergência é a seguinte:

- $\phi(x, y)$: a série é apenas simplesmente convergente para $y = \pm L$, e absoluta e uniformemente convergente no intervalo $[0, L]$ para $-L < y < L$.

- $\partial_x \phi(x, y)$: a série é divergente para $y = \pm L$, mas absoluta e uniformemente convergente no intervalo $[0, L]$ para $-L < y < L$.
- $\partial_y \phi(x, y)$: a série é divergente para $y = \pm L$, mas absoluta e uniformemente convergente no intervalo $[0, L]$ para $-L < y < L$.