Física Matemática I - (noturno) - FMA204

Exame 1: 03/05/18

GABARITO

1. Para definir a função complexa $w(z) = z^{1/n}$, é preciso usar a função logaritmo, na qual é preciso considerar explicitamente todas as folhas da superfície de Riemann. Assim, com $z = \rho \exp(\imath\theta)$ onde $\theta \in [-\pi, \pi]$, temos que

$$
\begin{aligned}
w(z) &= e^{\frac{1}{n}\ln(z)}, \text{ onde} \\
\ln(z) &= \ln(\rho) + \imath\theta + \imath k 2\pi,
\end{aligned}
$$

onde k é um número inteiro qualquer, e $\ln(\rho)$ é a função logaritmo real usual.

(a) Escrevendo $w(z)$ explicitamente, temos

$$
\begin{aligned}
w(z) &= e^{\frac{1}{n}[\ln(\rho)+\imath\theta+\imath k2\pi]} \\
&= e^{\frac{1}{n}\ln(\rho)}\, e^{\left(\imath\frac{\theta}{n}\right)}\, e^{\left(\imath\frac{k}{n}2\pi\right)} \\
&= \rho^{\frac{1}{n}}\, e^{\left(\imath\frac{\theta}{n}\right)}\, e^{\left(\imath\frac{k}{n}2\pi\right)}.
\end{aligned}
$$

Como θ está entre $-\pi$ e π e $n > 1$, θ/n nunca dá uma volta completa em torno da origem, de forma que tanto o fator envolvendo ρ quanto a primeira exponencial imaginária são funções complexas de valor único. Já a segunda exponencial atribui à função vários valores, conforme k varia pelos inteiros. Entretanto, como tanto n quanto k são inteiros, fica estabelecida uma periodicidade nesta função, pois o valor dela para $k = 0$ coincide com o valor para $k = n$, uma vez que neste caso o argumento da exponencial é $2\pi\imath$. Na realidade, todos os valores de k dados por $k = mn$, onde m é um número inteiro qualquer, resultam no mesmo valor para a função, incluindo no caso dos múltiplos negativos de n. Assim, restam apenas n valores diferentes da função, que podem ser representados, por exemplo, por $k \in [0, \ldots, n-1]$. Vemos assim que a função $w(z) = z^{1/n}$ é uma função de n valores, que atribui n valores diferentes a cada valor de z.

(b) Como já temos os n valores da função escritos explicitamente em forma polar,

$$
w(z) = \rho^{\frac{1}{n}}\, e^{\left[\imath\left(\frac{\theta}{n}+\frac{k}{n}2\pi\right)\right]}, \text{ para } k = 0, \ldots, n-1,
$$

verificamos imediatamente que o raio $\rho^{1/n}$ não depende de k, de forma que é o mesmo para todos os n valores, que estão portanto localizados sobre o círculo com este raio. Além disso, cada um dos valores tem ângulo igual ao anterior aumentado da quantidade constante $2\pi/n$, de forma que os n valores estão igualmente espaçados ao longo do círculo.

(c) Como já vimos nos itens anteriores, o raio é $\rho^{1/n}$ e os n ângulos são dados por

$$
\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \text{ para } k = 0, \ldots, n-1.
$$

(d) O ponto de singularidade é o ponto $z = 0$, onde os ângulos que diferenciam as folhas de Riemann ficam indefinidos. Assim, para construir a superfície de Riemann, é necessário retirar este ponto do domínio, e considerar como folhas n cópias superpostas do plano complexo, cada uma com a origem retirada. Atribuímos a cada uma destas n folhas um valor de k em $[0, \ldots, n-1]$. Cada uma destas folhas deve ser cortada, da origem até o infinito, ao longo de uma curva simples arbitrária, a mesma para todas as folhas, por exemplo o semi-eixo real negativo. Em seguida um lado de cada um destes cortes é colado ao lado oposto do corte da folha seguinte, formando assim uma espécie de superfície espiral de n voltas. Por fim, os lados restantes da primeira e da última folha são colados, formando a superfície de Riemann, que representa o domínio da função e sobre a qual pode ser representada de forma completa e unívoca a imagem da função.

(e) Mais uma vez, partimos da forma polar explícita da função,

$$\begin{aligned} w(z) &= \rho^{\frac{1}{n}}\, e^{\left[\imath\left(\frac{\theta}{n}+\frac{k}{n}2\pi\right)\right]} \\ &= \rho^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{k}{n}2\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{k}{n}2\pi\right)\right], \end{aligned}$$

e utilizamos a versão polar das condições de Cauchy-Riemann para verificar a analiticidade. Temos para as expressões relevantes envolvendo as derivadas parciais,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{1}{n}\,\rho^{\frac{1}{n}-1} \cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{k}{n}2\pi\right), \\ \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial v}{\partial \theta} &= \rho^{\frac{1}{n}-1}\frac{1}{n}\, \cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{k}{n}2\pi\right), \\ \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \rho^{\frac{1}{n}-1}\frac{(-1)}{n}\, \sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{k}{n}2\pi\right), \\ -\frac{\partial v}{\partial \rho} &= \frac{(-1)}{n}\,\rho^{\frac{1}{n}-1} \sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{k}{n}2\pi\right), \end{aligned}$$

das quais se verifica que as duas condições de Cauchy-Riemann estão satisfeitas para todos os valores de ρ e θ exceto para $\rho = 0$, pois neste caso as derivadas não existem, uma vez que o expoente $(1/n) - 1$ é negativo, pois $n > 1$. Além disso, vemos que as duas condições estão satisfeitas para qualquer valor de k, de onde segue que a função é analítica sobre toda a superfície de Riemann.

2. Vamos expandir em uma série de potências em torno de $z_0 = 0$ a função

$$w(z) = \frac{3}{\sqrt{4-z}}.$$

(a) A função é definida como a razão de duas funções, sendo aquela em denominador, a função constante, analítica em todo o plano complexo, e aquele em denominador, uma raiz quadrada, analítica em todo o plano complexo exceto pelo ponto $z = 4$, no qual além de não-analítica, ela é nula. Assim, a função resultante é analítica em todo o plano complexo exceto pelo ponto $z = 4$. De fato, como a função é definida como uma raiz quadrada, ela é analítica sobre uma superfície de Riemann de duas folhas, ambas idênticas ao plano complexo com o ponto $z = 4$ retirado. No ponto $z = 4$ a função tem uma singularidade do tipo ponto de ramificação.

(b) Calculando as primeiras poucas derivadas temos

$$\begin{aligned}
w^{0\prime}(z) &= \frac{3}{\sqrt{4-z}}, \\
w^{1\prime}(z) &= \frac{1}{2}\,\frac{3}{\sqrt{4-z}^{3}}, \\
w^{2\prime}(z) &= \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{3}{\sqrt{4-z}^{5}}, \\
w^{3\prime}(z) &= \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{3}{\sqrt{4-z}^{7}}, \\
w^{4\prime}(z) &= \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{7}{2}\,\frac{3}{\sqrt{4-z}^{9}}, \\
w^{5\prime}(z) &= \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,\frac{7}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{3}{\sqrt{4-z}^{11}}, \\
\cdots & \quad \cdots .
\end{aligned}$$

Sistematizando as respostas, podemos escrever que

$$\begin{aligned}
w^{n\prime}(z) &= \frac{(2n-1)!!}{2^{n}}\,\frac{3}{\sqrt{4-z}^{2n+1}} \\
&= \frac{(2n+1)!!}{2^{n}(2n+1)}\,\frac{3}{\sqrt{4-z}^{2n+1}}.
\end{aligned}$$

Aplicando isto em $z_0 = 0$, e escolhendo a folha de Riemann que corresponde a $\sqrt{4} = +2$ como localização do ponto z_0, temos

$$\begin{aligned}
w^{n\prime}(0) &= \frac{(2n+1)!!}{2^{n}(2n+1)}\,\frac{3}{\sqrt{4}^{2n+1}} \\
&= \frac{(2n+1)!!}{2^{n}(2n+1)}\,\frac{3}{2^{2n+1}} \\
&= \frac{3}{2}\,\frac{(2n+1)!!}{2^{3n}(2n+1)} \\
&= \frac{3}{2}\,\frac{(2n+1)!!(2n)!!}{2^{3n}(2n)!!(2n+1)} \\
&= \frac{3}{2}\,\frac{(2n+1)!}{2^{4n}n!(2n+1)} \\
&= \frac{3}{2}\,\frac{(2n)!}{2^{4n}n!}.
\end{aligned}$$

Temos portanto para a série de Taylor da função em torno do zero,

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^{3n}n!(2n+1)}\,z^{n} \\
&= \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n}(n!)^{2}}\,z^{n}.
\end{aligned}$$

(c) Como a função tem uma única singularidade localizada em $z = 4$, o disco de convergência é um disco de raio 4 centrado na origem. A intersecção deste disco com o eixo real é o intervalo aberto $(-4, 4)$, ou seja, no caso $y = 0$ a série converge para $-4 < x < 4$.

(d) Se calcularmos a função no ponto $z = 1$, que está bem dentro do intervalo real de convergência da série, obtemos

$$w(1) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

de forma que o cálculo da série para $z = 1$ nos dá uma forma algorítmica de calcular $\sqrt{3}$,

$$\begin{aligned} w(1) &= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{4n}(n!)^2} \, 1^n \Rightarrow \\ \sqrt{3} &= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{4n}(n!)^2}. \end{aligned}$$

(e) Como o fatorial $(2n)!$ é um número inteiro, o numerador de cada termo da série é inteiro. Como tanto 2^{4n} quanto $(n!)^2$ também são números inteiros, o denominador também é inteiro, e segue que cada termo da série é um número racional. Como a soma de números racionais é racional, uma vez que os racionais formam um corpo, cada soma parcial da série é um número racional. A sequência de somas parciais forma, portanto, uma sequência de números racionais que converge para o número irracional $\sqrt{3}$.

3. Recordemos que a série de Taylor de $\sin(z)$ é

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \, z^{2k+1}.$$

(a) Simplesmente compondo a série de $\sin(z)$ com a função z^2 temos a série

$$\sin\left(z^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \, z^{4k+2}.$$

(b) Considerando agora a função $f(z) = \sin\left(z^2\right)/z^2$, para $z \neq 0$, podemos escrever para ela a série

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \, z^{4k}.$$

(c) Observe-se que esta série não tem nenhuma potência negativa de z, e que portanto é uma série de Taylor e não de Laurent. Assim, a série automaticamente estende o domínio de analiticidade da função, em relação à definição inicial, que não pode ser usada em $z = 0$. Como a série de $\sin(z)$ é convergente em todo o plano complexo, segue que esta série também é convergente em todo o plano complexo.

(d) Se calcularmos o limite $z \to 0$ usando a série para representar a função, segue imediatamente que apenas o primeiro termo é não-nulo, e portanto que

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{z\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{4k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \lim_{z\to 0} z^{4k} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(e) Se definirmos a função em $z = 0$ pelo critério de continuidade, ou seja, $f(0) = 1$, que é o valor retornado pela série naquele ponto, segue que a função é representada pela série em todo o plano complexo, e como a série converge para uma função analítica, segue que a função resultante é analítica sobre todo o plano complexo.

4. Devemos calcular a integral assintótica

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 2}\, dx.$$

(a) Estendendo a variável real x para uma correspondente variável complexa $z = x + \imath y$, podemos escrever a integral como

$$I = \int_C \frac{z^2}{z^4 + 3z^2 + 2}\, dz,$$

onde o domínio de integração C é o eixo real sobre o plano de z complexo, ou seja $-\infty < x < \infty$ com $y = 0$.

(b) Usamos a fórmula de Báskara para achar as raízes do polinômio quadrático em z^2,

$$\begin{aligned}
z_{\pm}^2 &= \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} \\
&= \frac{-3 \pm 1}{2}.
\end{aligned}$$

Como se vê, os dois resultados são negativos, pois temos as possibilidades $-4/2 = -2$ e $-2/2 = -1$. Segue que as raízes para z são todas imaginárias, $z = \pm\sqrt{2}\imath$ e $z = \pm\imath$, de forma que o polinômio pode ser fatorado como

$$z^4 + 3z^2 + 2 = \left(z - \sqrt{2}\imath\right)\left(z + \sqrt{2}\imath\right)(z - \imath)(z + \imath),$$

de forma que a integral pode ser escrita como

$$I = \int_C \frac{z^2}{\left(z - \sqrt{2}\imath\right)\left(z + \sqrt{2}\imath\right)(z - \imath)(z + \imath)}\, dz,$$

que ainda se estende sobre o eixo real no plano de z complexo. Segue que as singularidades do integrando são quatro polos simples localizados em $z = \pm\imath$ e $z = \pm\imath\sqrt{2}$.

(c) Podemos fechar o circuito usando um arco que tende ao infinito, tanto no semiplano superior quanto no semiplano inferior. Se usarmos o arco no semiplano superior, as singularidades relevantes são $z = \boldsymbol{\imath}$ e $z = \sqrt{2}\boldsymbol{\imath}$. Se usarmos o arco no semiplano inferior, as singularidades relevantes são $z = -\boldsymbol{\imath}$ e $z = -\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}$. No que segue vamos usar a primeira alternativa.

(d) A integral adicional I_∞ é definida sobre um semi-arco de raio R, com θ indo de 0 a π, no limite em que fazemos $R \to \infty$. Usando $z = R\exp(\boldsymbol{\imath}\theta)$ e portanto $dz = \boldsymbol{\imath}z\, d\theta$ sobre o arco, temos para esta integral

$$\begin{aligned}
I_\infty &= \int_0^\pi dz\, \frac{z^2}{z^4+3z+2} \\
&= \int_0^\pi d\theta\, \boldsymbol{\imath}z\, \frac{z^2}{z^4+3z+2} \\
&= \int_0^\pi d\theta\, \boldsymbol{\imath}R\, e^{\boldsymbol{\imath}\theta}\, \frac{R^2\, e^{\boldsymbol{\imath}2\theta}}{R^4\, e^{\boldsymbol{\imath}4\theta} + 3R^2\, e^{\boldsymbol{\imath}2\theta} + 2} \\
&= \frac{\boldsymbol{\imath}}{R} \int_0^\pi d\theta\, \frac{e^{\boldsymbol{\imath}3\theta}}{e^{\boldsymbol{\imath}4\theta} + 3e^{\boldsymbol{\imath}2\theta}/R^2 + 2/R^4}.
\end{aligned}$$

Vemos que no limite $R \to \infty$ o integrando se simplifica, de forma que, calculando o módulo da integral neste limite, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} |I_\infty| &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \left| \int_0^\pi d\theta\, \frac{e^{\boldsymbol{\imath}3\theta}}{e^{\boldsymbol{\imath}4\theta} + 3e^{\boldsymbol{\imath}2\theta}/R^2 + 2/R^4}. \right| \\
&\leq \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi d\theta\, \frac{\left|e^{\boldsymbol{\imath}3\theta}\right|}{\left|e^{\boldsymbol{\imath}4\theta} + 3e^{\boldsymbol{\imath}\theta}/R^2 + 2/R^4\right|} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi d\theta\, \frac{1}{\left|e^{\boldsymbol{\imath}4\theta}\right|} \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi d\theta \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{R} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como o módulo de I_∞ é positivo e está limitado superiormente por zero no limite, segue que o limite do módulo é zero. Se o módulo tende a zero, é necessário que o número também tenda a zero, de forma que temos

$$\lim_{R\to\infty} I_\infty = 0.$$

(e) O circuito está sendo percorrido na direção positiva, e os resíduos R_1 e R_2 dos polos relevantes do integrando podem ser calculados através dos limites

$$\begin{aligned}
R_1 &= \lim_{z\to\boldsymbol{\imath}} \frac{z^2(z-\boldsymbol{\imath})}{\left(z-\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}\right)\left(z+\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}\right)(z-\boldsymbol{\imath})(z+\boldsymbol{\imath})} \\
&= \lim_{z\to\boldsymbol{\imath}} \frac{z^2}{\left(z-\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}\right)\left(z+\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}\right)(z+\boldsymbol{\imath})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1}{\left(1-\sqrt{2}\right)\boldsymbol{\imath}\left(1+\sqrt{2}\right)\boldsymbol{\imath}(2\boldsymbol{\imath})} \\
&= \frac{-\boldsymbol{\imath}}{\left(1^2-\sqrt{2}^2\right)2} \\
&= \frac{\boldsymbol{\imath}}{(2-1)2} \\
&= \frac{\boldsymbol{\imath}}{2}, \\
R_2 &= \lim_{z\to\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}} \frac{z^2\left(z-\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}\right)}{\left(z-\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}\right)\left(z+\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}\right)(z-\boldsymbol{\imath})(z+\boldsymbol{\imath})} \\
&= \lim_{z\to\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}} \frac{z^2}{\left(z+\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}\right)(z-\boldsymbol{\imath})(z+\boldsymbol{\imath})} \\
&= \frac{-2}{\left(2\sqrt{2}\right)\boldsymbol{\imath}\left(\sqrt{2}-1\right)\boldsymbol{\imath}\left(\sqrt{2}+1\right)\boldsymbol{\imath}} \\
&= \frac{-\boldsymbol{\imath}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}^2-1^2\right)} \\
&= \frac{-\boldsymbol{\imath}\sqrt{2}}{2(2-1)} \\
&= \frac{-\boldsymbol{\imath}\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

Segue que temos para a integral

$$
\begin{aligned}
I &= (2\pi\boldsymbol{\imath})(R_1+R_2) \\
&= 2\pi\boldsymbol{\imath}\left(\frac{\boldsymbol{\imath}}{2}-\frac{\sqrt{2}\boldsymbol{\imath}}{2}\right) \\
&= -\pi\left(1-\sqrt{2}\right) \\
&= \pi\left(\sqrt{2}-1\right).
\end{aligned}
$$

5. Vamos calcular por resíduos a integral real

$$
I = \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{4}{5+4\sin(\theta)}.
$$

(a) Escrevendo o seno em termos de exponenciais complexas temos

$$
\begin{aligned}
\sin(\theta) &= \frac{1}{2\boldsymbol{\imath}}\left(e^{\boldsymbol{\imath}\theta}-e^{-\boldsymbol{\imath}\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2\boldsymbol{\imath}}\left(z-\frac{1}{z}\right),
\end{aligned}
$$

onde a última forma é válida desde que estejamos sobre o círculo unitário no plano de z complexo, com $z=\rho\exp(\boldsymbol{\imath}\theta)$ e $\rho=1$.

(b) Escrevendo z na representação polar, temos

$$\begin{aligned} z &= \rho\, e^{\imath\theta} \Rightarrow \\ dz &= \imath z\, d\theta, \end{aligned}$$

de forma que temos

$$d\theta = \frac{1}{\imath z}\, dz.$$

Isto vale independentemente do valor de ρ, mas como vimos acima apenas para $\rho = 1$ o seno pode ser escrito de forma simples em termos de z, de forma que o caminho de integração no plano de z complexo é o círculo unitário.

(c) Fazendo na integral as transformações indicadas acima, obtemos

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{2\pi} \imath z\, d\theta\, \frac{1}{\imath z}\, \frac{1}{5 - 2\imath(z - 1/z)} \\ &= 4\int_0^{2\pi} dz\, \frac{1}{\imath}\, \frac{1}{5z - 2\imath(z^2 - 1)} \\ &= 4\oint dz\, \frac{1}{5\imath z + 2z^2 - 2}, \end{aligned}$$

onde o circuito fechado é o círculo unitário.

(d) É preciso agora fatorar o polinômio em denominador. Usando-se a fórmula de Báskara não é difícil verificar que as duas raízes são $-2\imath$ e $-\imath/2$, de forma que temos para a integral

$$\begin{aligned} I &= 4\oint dz\, \frac{1}{2z^2 + 5\imath z - 2} \\ &= 4\oint dz\, \frac{1}{2(z + 2\imath)(z + \imath/2)}. \end{aligned}$$

(e) Apenas o polo dado por $z = -\imath/2$ fica dentro do circuito de integração, de forma que apenas o seu resíduo R irá contribuir para a integral. O resíduo relevante do integrando pode ser calculado de forma muito simples através do limite

$$\begin{aligned} R &= \lim_{z \to -\imath/2} \frac{(z + \imath/2)}{2(z + 2\imath)(z + \imath/2)} \\ &= \lim_{z \to -\imath/2} \frac{1}{2(z + 2\imath)} \\ &= \frac{1}{-\imath + 4\imath} \\ &= \frac{1}{3\imath}. \end{aligned}$$

Segue que o valor da integral é dado, sem qualquer dificuldade, por

$$I = 4(2\pi\imath)R = \frac{8\pi}{3}.$$