Física Matemática I - (diurno) - FMA204

Exame 1: 11/05/17

GABARITO

1. Consideremos a função $f(x) = |x|$ dentro do intervalo $[-L/2, L/2]$. Observe-se que trata-se aqui de uma função par em relação a x. Recordemos que os coeficientes da versão real da série de Fourier são dados por

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \cos\left(2\pi\frac{kx}{L}\right) f(x),\\ \beta_k &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \sin\left(2\pi\frac{kx}{L}\right) f(x).\end{aligned}$$

(a) O coeficiente α_0 é dado por

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, f(x)\\ &= \frac{4}{L}\int_{0}^{L/2} dx\, f(x)\\ &= \frac{4}{L}\int_{0}^{L/2} dx\, x\\ &= \frac{4}{L}\,\frac{x^2}{2}\Big[_0^{L/2}\\ &= \frac{4}{L}\,\frac{L^2}{8}\\ &= \frac{L}{2}.\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que a função $f(x)$ é par. Temos portanto que α_0 é o dobro do valor médio da função no intervalo, que é $L/4$, ou seja

$$\alpha_0 = \frac{L}{2}.$$

(b) Os coeficientes α_k, com $k > 0$, são dados por

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \cos\left(2\pi\frac{kx}{L}\right) f(x)\\ &= \frac{4}{L}\int_{0}^{L/2} dx\, \cos\left(2\pi\frac{kx}{L}\right) f(x)\\ &= \frac{4}{L}\int_{0}^{L/2} dx\, x\cos\left(2\pi\frac{kx}{L}\right)\\ &= \frac{4}{L}\,\frac{L}{2\pi k}\, x\sin\left(2\pi\frac{kx}{L}\right)\Big[_0^{L/2} - \frac{4}{L}\,\frac{L}{2\pi k}\int_0^{L/2} dx\, \sin\left(2\pi\frac{kx}{L}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi k}\,\frac{L}{2}\,\sin(\pi k) - \frac{2}{\pi k}\,\frac{(-L)}{2\pi k}\,\cos\!\left(2\pi\frac{kx}{L}\right)\,\Bigg[_{0}^{L/2} \\
&= -\frac{1}{\pi k}\,\frac{L}{\pi k}\,[\cos(0)-\cos(\pi k)] \\
&= -\frac{L}{\pi^2 k^2}\left[1-(-1)^k\right],
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato de que a função $f(x)$ é par e integramos por partes. Vemos aqui que o resultado é nulo se k for par, e para k ímpar temos

$$
\alpha_k = -\frac{2L}{\pi^2 k^2}.
$$

(c) Os coeficientes β_k, com $k > 0$, são dados por

$$
\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\,\sin\!\left(2\pi\frac{kx}{L}\right) f(x) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

pois o integrando é ímpar, uma vez que o seno é ímpar e $f(x)$ é par, enquanto o intervalo de integração é simétrico.

(d) A série de Fourier da função pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\!\left(2\pi\frac{kx}{L}\right) \\
&= \frac{L}{4} - \frac{2L}{\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,\cos\!\left(2\pi\frac{kx}{L}\right),
\end{aligned}
$$

onde $k = 2j+1$, de forma que apenas os termos com k ímpar fazem parte da soma.

(e) Como os coeficientes vão a zero como $1/k^2$, a série é convergente, absolutamente convergente e portanto uniformemente convergente no intervalo de periodicidade.

2. (a) A função é contínua em todo o intervalo mas, devido à aplicação do valor absoluto, não é diferenciável nos pontos onde a função troca de sinal com derivada não-nula, ou seja nos pontos $x = 0$ e $x = \pm L/2$.

(b) Usando a definição temos para os coeficientes α_k

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\,\cos\!\left(2\pi k\frac{x}{L}\right)\left|\sin\!\left(2\pi\frac{x}{L}\right)\right| \\
&= \frac{4}{L}\int_{0}^{L/2} dx\,\cos\!\left(2\pi k\frac{x}{L}\right)\sin\!\left(2\pi\frac{x}{L}\right),
\end{aligned}
$$

pois a função é par, logo podemos limitar a integral à parte positiva do intervalo, e nesta parte do intervalo podemos ignorar o módulo. Fazendo duas integrações por partes sucessivas, obtemos

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{4}{L}\Bigg[\frac{L}{2\pi k}\sin\Big(2\pi k\frac{x}{L}\Big)\sin\Big(2\pi\frac{x}{L}\Big)\ \Big[_0^{L/2} \\
&\qquad -\frac{L}{2\pi k}\int_0^{L/2}dx\ \sin\Big(2\pi k\frac{x}{L}\Big)\frac{2\pi}{L}\cos\Big(2\pi\frac{x}{L}\Big)\Bigg] \\
&= \frac{2}{\pi k}\Bigg[\sin(\pi k)\sin(\pi)-\sin(0)\sin(0)-\frac{2\pi}{L}\int_0^{L/2}dx\ \sin\Big(2\pi k\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(2\pi\frac{x}{L}\Big)\Bigg] \\
&= -\frac{4}{Lk}\Bigg[\Big(\frac{-L}{2\pi k}\Big)\cos\Big(2\pi k\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(2\pi\frac{x}{L}\Big)\ \Big[_0^{L/2} \\
&\qquad -\Big(\frac{-L}{2\pi k}\Big)\int_0^{L/2}dx\ \cos\Big(2\pi k\frac{x}{L}\Big)\Big(\frac{-2\pi}{L}\Big)\sin\Big(2\pi\frac{x}{L}\Big)\Bigg] \\
&= \frac{2}{\pi k^2}\Bigg[\cos\Big(2\pi k\frac{x}{L}\Big)\cos\Big(2\pi\frac{x}{L}\Big)\ \Big[_0^{L/2}+\frac{2\pi}{L}\int_0^{L/2}dx\ \cos\Big(2\pi k\frac{x}{L}\Big)\sin\Big(2\pi\frac{x}{L}\Big)\Bigg] \\
&= \frac{2}{\pi k^2}\Big[\cos(\pi k)\cos(\pi)-\cos(0)\cos(0)+\frac{\pi}{2}\,\alpha_k\Big] \\
&= \frac{2}{\pi k^2}[-\cos(\pi k)-1]+\frac{1}{k^2}\,\alpha_k.
\end{aligned}
$$

Como se vê, a dupla integração por partes reconstituiu a fórmula que define α_k. Podemos agora simplesmente isolar α_k, e obter assim

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k^2}\,\alpha_k-\alpha_k &= \frac{2}{\pi k^2}\,[1+\cos(\pi k)] \Rightarrow \\
(1-k^2)\alpha_k &= \frac{2}{\pi}\,[1+(-1)^k].
\end{aligned}
$$

O lado direito desta expressão se anula para $k=2j+1$, de forma que concluímos que $\alpha_k=0$ para k ímpar. Para $k=2j$ as chaves do lado direito resultam em um fator de 2, e portanto temos

$$
\alpha_k=\frac{4}{\pi(1-k^2)}.
$$

Outra forma de se fazer a integral é usar relações trigonométricas para escrevê-la como

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{4}{L}\int_0^{L/2}dx\ \cos\Big(2\pi k\frac{x}{L}\Big)\sin\Big(2\pi\frac{x}{L}\Big) \\
&= \frac{4}{L}\Bigg\{\frac{1}{2}\int_0^{L/2}dx\ \sin\Big[2\pi(k+1)\frac{x}{L}\Big]-\frac{1}{2}\int_0^{L/2}dx\ \sin\Big[2\pi(k-1)\frac{x}{L}\Big]\Bigg\} \\
&= \frac{2}{L}\Bigg\{\frac{(-L)}{2\pi(k+1)}\cos\Big[2\pi(k+1)\frac{x}{L}\Big]\ \Big[_0^{L/2}-\frac{(-L)}{2\pi(k-1)}\cos\Big[2\pi(k-1)\frac{x}{L}\Big]\ \Big[_0^{L/2}\Bigg\} \\
&= \frac{1}{\pi}\Bigg\{\frac{1}{k+1}\cos\Big[2\pi(k+1)\frac{x}{L}\Big]\ \Big[_{L/2}^{0}-\frac{1}{k-1}\cos\Big[2\pi(k-1)\frac{x}{L}\Big]\ \Big[_{L/2}^{0}\Bigg\} \\
&= \frac{1}{\pi}\Bigg\{\frac{1}{k+1}\Big[1-(-1)^{k+1}\Big]-\frac{1}{k-1}\Big[1-(-1)^{k-1}\Big]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\left[1-(-1)^{k+1}\right]\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[1+(-1)^{k}\right]\frac{-2}{k^2-1} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[1+(-1)^{k}\right]\frac{1}{1-k^2}.
\end{aligned}
$$

Além disso, também é possível fazer a integral representando as funções trigonométricas através de exponenciais complexas. Em resumo, temos os seguintes resultados para α_k,

$$
\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-k^2} \quad \text{para} \quad k=2j, \\
\alpha_k &= 0 \qquad\qquad \text{para} \quad k=2j+1,
\end{aligned}
$$

onde $j \in \{0,1,2,\ldots,\infty\}$. Note-se que o denominador que aparece no resultado nunca se anula para k par, incluindo o caso $k=0$. Ele só poderia ser nulo para o caso $k=1$, que não está incluído. Note-se também que o coeficiente α_0 é positivo, mas que todos os outros coeficientes α_k para k ímpar são negativos.

(c) A função é par, logo por simetria do integrando da integral que define β_k temos que $\beta_k = 0$ para todo k.

(d) A série pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-k^2}\cos\!\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1-4j^2}\cos\!\left(\frac{4\pi jx}{L}\right).
\end{aligned}
$$

(e) Lembremos que para a discussão de convergência sempre podemos partir de algum ponto intermediário da série, deixando de fora um número finito de termos no início dela. Observemos então que temos para o módulo de α_k, para os casos que não são nulos, ou seja com $k=2j$, e para $k>0$, ou seja para $j \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
|\alpha_k| &= \frac{4}{\pi}\frac{1}{4j^2-1} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{j^2-1/4}.
\end{aligned}
$$

Fazendo a transformação de variáveis $j = l+1/2$, e considerando apenas valores de l dados por $l \geq 3/2$, o que corresponde a $j \geq 2$ e portanto a $k \geq 4$, temos

$$
\begin{aligned}
|\alpha_k| &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{l^2+l+1/4-1/4} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{l(l+1)} \\
&\leq \frac{1}{\pi}\frac{1}{l^2}.
\end{aligned}
$$

A soma dos módulos dos coeficientes da série é portanto limitado pela soma destes termos, soma esta que é limitada, uma vez que eles caem quadraticamente para zero quando $l \to \infty$. Segue portanto que a série é convergente e também que ela é absolutamente convergente, e portanto uniformemente convergente.

Observe-se que esta particular forma de onda é aquela que é obtida através da assim-chamada "retificação de onda completa" de uma onda senoidal, tal como aquela do nosso padrão de alimentação de força. O coeficiente α_0 está relacionado à voltagem da componente de corrente contínua que é obtida desta forma (sem filtragem), e o termo α_2 corresponde às principais oscilações que se superpõem a esta componente contínua. No caso de uma alimentação de força de 60 Hz, como é o nosso caso, este ruído residual teria a frequência de 120 Hz.

3. Recordemos que os coeficientes da versão real da série de Fourier são dados por

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\,\cos\left(2\pi\frac{kx}{L}\right)\varphi(x),\\
\beta_k &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\,\sin\left(2\pi\frac{kx}{L}\right)\varphi(x).
\end{aligned}$$

Observemos também que a função dada é par em relação a x.

(a) Para α_0 temos

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\,\varphi(x)\\
&= \frac{4}{L}\int_{0}^{L/2} dx\,\varphi(x)\\
&= \frac{4}{L}\int_{0}^{L/4} dx\\
&= \frac{4}{L}\,x\,\Big[_{0}^{L/4},
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que a função $\varphi(x)$ é par; em suma, temos que $\alpha_0 = 1$.

(b) Os coeficientes α_k, com $k > 0$, são dados por

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\,\cos\left(2\pi\frac{kx}{L}\right)\varphi(x)\\
&= \frac{4}{L}\int_{0}^{L/2} dx\,\cos\left(2\pi\frac{kx}{L}\right)\varphi(x)\\
&= \frac{4}{L}\int_{0}^{L/4} dx\,\cos\left(2\pi\frac{kx}{L}\right)\\
&= \frac{4}{L}\,\frac{L}{2\pi k}\sin\left(2\pi\frac{kx}{L}\right)\Big[_{0}^{L/4}\\
&= \frac{2}{\pi k}\,\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right),
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que a função $\varphi(x)$ é par. Vemos aqui que o resultado é nulo se k for par, pois para $k = 2j$ temos que

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) &= \sin(\pi j) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

enquanto para ímpar, ou seja $k = 2j + 1$, temos

$$\begin{aligned}
\sin\left(\pi\frac{2j+1}{2}\right) &= \sin(\pi j + \pi/2) \\
&= \sin(\pi j)\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)\cos(\pi j) \\
&= \cos(\pi j) \\
&= (-1)^j.
\end{aligned}$$

Segue portanto que temos para os coeficientes

$$\alpha_k = \frac{2(-1)^j}{\pi k},$$

para $k = 2j + 1$, e $\alpha_k = 0$ para $k = 2j$.

(c) Os coeficientes β_k são nulos para todo k, pois neste caso o integrando na fórmula que dá o coeficiente é ímpar, e a integral está sendo calculada em um intervalo simétrico.

(d) A série de Fourier da função pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(2\pi\frac{kx}{L}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{k} \cos\left(2\pi\frac{kx}{L}\right),
\end{aligned}$$

onde $k = 2j+1$, de forma que apenas os termos com k ímpar fazem parte da soma. Dado o decaimento dos coeficientes com apenas uma potência de k, vemos que esta série não é nem absolutamente convergente nem uniformemente convergente.

(e) Como a série corre apenas por valores ímpar de k e troca de sinal de um termo não-nulo para o próximo, vemos que ela é monotônica de passo 4, de forma que é simplesmente convergente em todo o intervalo de periodicidade, possivelmente a menos de quatro pontos especiais, que devem ser examinados em separado. Os pontos especiais são dados por

$$2\pi\,\frac{\Delta k\,x}{L} = 2\pi n \Rightarrow \frac{x}{L} = \frac{n}{4},$$

para valores inteiros de n, uma vez que $\Delta k = 4$. Temos portanto quatro soluções dentro do intervalo de periodicidade, $x = 0$, $x = L/4$, $x = -L/4$ e $x = \pm L/2$. Em $x = \pm L/4$ temos para a série

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{k} \cos\left(\pi\frac{k}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

pois $\cos(\pi k/2) = 0$ uma vez que k é ímpar. Temos portanto séries convergentes nestes dois pontos especiais. Em $x = 0$ temos para a série

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{k}\cos(0)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{k},\end{aligned}$$

onde $k = 2j + 1$, e para $x = \pm L/2$ temos

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{k}\cos(\pi k)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{k},\end{aligned}$$

uma vez que k é ímpar. Nestes dois últimos casos as séries resultantes também são convergentes, pois uma vez que $k = 2j + 1$ podemos escrever que

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{k} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right),$$

que mais uma vez é uma série convergente pelo critério de monotonicidade, uma vez que é monotônica de passo 2 e contém apenas termos com senos.

Em conclusão, a série é de fato simplesmente convergente em todo o intervalo de periodicidade, incluindo os quatro pontos especiais.

4. Vamos usar transformadas de Fourier na variável temporal para resolver a equação diferencial não-homogênea

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t) + \gamma\frac{\partial}{\partial t}x(t) + kx(t) = F(t) = I_0\delta(t),$$

com a condição inicial de que o movimento parte da posição de repouso, ou seja de que $x(0) = 0$.

(a) A transformada de Fourier $\widetilde{F}(\omega)$ de $F(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\imath\omega t}F(t)\\ &= \frac{I_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\imath\omega t}\delta(t)\\ &= \frac{I_0}{\sqrt{2\pi}}.\end{aligned}$$

(b) A variável dinâmica $x(t)$ pode ser escrita em termos da sua transformada de Fourier como

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{\imath\omega t}\widetilde{x}(\omega).$$

Segue que as duas primeiras derivadas temporais de $x(t)$ podem ser escritas como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,(\imath\omega)\,e^{\imath\omega t}\widetilde{x}(\omega), \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,(-\omega^2)\,e^{\imath\omega t}\widetilde{x}(\omega).
\end{aligned}
$$

(c) Substituindo na equação diferencial $x(t)$ e as suas duas primeiras derivadas, como expressas no item anterior em termos de suas transformadas de Fourier, e fazendo o mesmo com $F(t)$, temos

$$
\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,e^{\imath\omega t}\left[-m\omega^2+\imath\gamma\omega+k\right]\widetilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,e^{\imath\omega t}\widetilde{F}(\omega).
$$

Como o conjunto de funções $\exp(\imath\omega t)$ forma uma base, e substituindo o valor já calculado de $\widetilde{F}(\omega)$, temos

$$
\left[-m\omega^2+\imath\gamma\omega+k\right]\widetilde{x}(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{2\pi}},
$$

que é a equação correspondente no espaço de momentos.

(d) A equação deduzida no item anterior é puramente algébrica, e pode ser resolvida trivialmente, resultando para $\widetilde{x}(\omega)$ a expressão racional

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x}(\omega) &= \frac{I_0}{\sqrt{2\pi}\left[-m\omega^2+\imath\gamma\omega+k\right]} \\
&= \frac{-I_0}{m\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\left[\omega^2-\imath\frac{\gamma}{m}\omega-\frac{k}{m}\right]}.
\end{aligned}
$$

(e) A expressão de $x(t)$ em termos da sua transformada de Fourier é

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,e^{\imath\omega t}\widetilde{x}(\omega) \\
&= \frac{-I_0}{2\pi m}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,e^{\imath\omega t}\frac{1}{\left[\omega^2-\imath\frac{\gamma}{m}\omega-\frac{k}{m}\right]}.
\end{aligned}
$$

Para fazer a integral por resíduos, fatoramos o denominador. Usando a fórmula de Báskara, temos as raízes

$$
\begin{aligned}
\omega_+ &= \frac{\imath\gamma}{2m}+\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} \\
&= \frac{\imath\gamma}{2m}+\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}, \\
\omega_- &= \frac{\imath\gamma}{2m}-\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} \\
&= \frac{\imath\gamma}{2m}-\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}.
\end{aligned}
$$

Como $\gamma > 0$, os dois polos correspondentes estão no semiplano superior do plano de ω complexo. Como queremos a solução para $t > 0$, este é também o semiplano pelo qual devemos fechar a integral no plano de ω complexo, dado o fator $\exp(\boldsymbol{\imath}\omega t)$ presente no integrando. Sendo C um circuito fechado formado pelo eixo real e por um semi-arco no infinito pelo semiplano superior, temos portanto

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-I_0}{2\pi m} \int_C d\omega \, \frac{e^{\boldsymbol{\imath}\omega t}}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)} \\ &= \frac{-I_0}{2\pi m} \, 2\pi\boldsymbol{\imath}(R_+ + R_-), \end{aligned}$$

onde R_+ e R_- são os dois resíduos correspondentes. Os dois polos são polos simples de forma que, usando o método do limite, temos para estes resíduos

$$\begin{aligned} R_+ &= \frac{e^{\boldsymbol{\imath}\omega_+ t}}{\omega_+ - \omega_-}, \\ R_- &= \frac{e^{\boldsymbol{\imath}\omega_- t}}{\omega_- - \omega_+}, \end{aligned}$$

de forma que temos para $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{-\boldsymbol{\imath} I_0}{m} \, (R_+ + R_-) \\ &= \frac{-\boldsymbol{\imath} I_0}{m} \, \frac{e^{\boldsymbol{\imath}\omega_+ t} - e^{\boldsymbol{\imath}\omega_- t}}{\omega_+ - \omega_-} \\ &= \frac{-\boldsymbol{\imath} I_0}{m} \, e^{-[\gamma/(2m)]t} \, \frac{e^{\boldsymbol{\imath}\sqrt{\omega_0^2 - [\gamma/(2m)]^2}\,t} - e^{-\boldsymbol{\imath}\sqrt{\omega_0^2 - [\gamma/(2m)]^2}\,t}}{2\sqrt{\omega_0^2 - [\gamma/(2m)]^2}} \\ &= \frac{-\boldsymbol{\imath} I_0}{m} \, e^{-[\gamma/(2m)]t} \, \frac{2\boldsymbol{\imath} \sin\left\{ \sqrt{\omega_0^2 - [\gamma/(2m)]^2}\, t \right\}}{2\sqrt{\omega_0^2 - [\gamma/(2m)]^2}}. \end{aligned}$$

Temos portanto a nossa resposta final, representando um movimento harmônico amortecido, com posição inicial nula e velocidade inicial dada pelo impulso,

$$x(t) = \frac{I_0}{m} \, \frac{e^{-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)t}}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}} \, \sin\left[\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}\, t \right].$$

Podemos agora aplicar a derivada desta expressão em $t = 0$ para descobrir a velocidade inicial fornecida pelo impulso,

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{I_0}{m} \Rightarrow \\ mv(0) &= I_0, \end{aligned}$$

onde $p(0) = mv(0)$ é o momento linear inicial, como seria de se esperar.

5. Vamos usar transformadas de Fourier na variável temporal para resolver a equação diferencial não-homogênea

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t) + \gamma\frac{\partial}{\partial t}x(t) + kx(t) = F(t) = F_0\theta(t),$$

com a condição inicial de que o movimento parte da posição de repouso, ou seja de que $x(0) = 0$. Observe-se que a força externa descontínua descrita consiste da simples aplicação de uma força externa constante no instante $t = 0$. Tudo que esta força externa constante faz é mudar a posição do ponto de equilíbrio do oscilador, de $x = 0$ para $x = F_0/k$. Assim, o que temos aqui, a menos de um deslocamento da origem do eixo coordenado x, é equivalente a um problema muito simples, o problema de um oscilador amortecido que parte do repouso de uma posição que não é a posição de equilíbrio.

(a) A transformada de Fourier $\widetilde{F}(\omega)$ de $F(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\imath\omega t-\gamma|t|}F(t) \\
&= \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\imath\omega t-\lambda|t|}\theta(t),
\end{aligned}$$

onde estamos regularizando a integral através do parâmetro positivo λ, que deve eventualmente ser colocada igual a zero. Fazemos agora uma integração por partes, obtendo assim

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(\omega) &= \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\imath\omega t-\lambda|t|}\theta(t) \\
&= \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-\imath\omega t-\lambda|t|}}{-\imath\omega \mp \lambda}\,\theta(t)\,\Big[_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dt\,\frac{e^{-\imath\omega t-\lambda|t|}}{-\imath\omega \mp \lambda}\,\delta(t)\right],
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\delta(t)$ é a derivada de $\theta(t)$. Em princípio o sinal em denominador deve ser negativo para $t > 0$ e positivo para $t < 0$, entretanto, como de qualquer forma a função $\theta(t)$ é nula para $t < 0$, podemos usar apenas o resultado para $t > 0$ sem que nada seja modificado. No limite $t \to \pm\infty$ o primeiro termo se anula, de forma que temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(\omega) &= \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\frac{e^{-\imath\omega t-\lambda|t|}}{\imath\omega + \lambda}\,\delta(t) \\
&= \frac{F_0}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\imath\omega + \lambda},
\end{aligned}$$

onde usamos a "função" delta de Dirac para fazer a integração. Temos portanto o resultado, ainda regularizado pelo parâmetro positivo λ,

$$\widetilde{F}(\omega) = \frac{-\imath F_0}{\sqrt{2\pi}(\omega - \imath\lambda)}.$$

(b) A variável dinâmica $x(t)$ pode ser escrita em termos da sua transformada de Fourier como

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{\imath\omega t}\widetilde{x}(\omega).$$

Segue que as duas primeiras derivadas temporais de $x(t)$ podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, (\imath\omega) \, e^{\imath\omega t} \widetilde{x}(\omega), \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, (-\omega^2) \, e^{\imath\omega t} \widetilde{x}(\omega).
\end{aligned}$$

(c) Substituindo na equação diferencial $x(t)$ e as suas duas primeiras derivadas, como expressas no item anterior em termos de suas transformadas de Fourier, e fazendo o mesmo com $F(t)$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{\imath\omega t} \left[-m\omega^2 + \imath\gamma\omega + k \right] \widetilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{\imath\omega t} \widetilde{F}(\omega).$$

Como o conjunto de funções $\exp(\imath\omega t)$ forma uma base, e substituindo o valor já calculado de $\widetilde{F}(\omega)$, temos

$$\left[-m\omega^2 + \imath\gamma\omega + k \right] \widetilde{x}(\omega) = \frac{-\imath F_0}{\sqrt{2\pi}(\omega - \imath\lambda)},$$

que é a equação correspondente no espaço de momentos.

(d) A equação deduzida no item anterior é puramente algébrica, e pode ser resolvida trivialmente, resultando para $\widetilde{x}(\omega)$ a expressão racional

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}(\omega) &= \frac{-\imath F_0}{\sqrt{2\pi}(\omega - \imath\lambda) \left[-m\omega^2 + \imath\gamma\omega + k \right]} \\
&= \frac{\imath F_0}{m\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega - \imath\lambda) \left[\omega^2 - \imath\frac{\gamma}{m}\omega - \frac{k}{m} \right]}.
\end{aligned}$$

(e) A expressão de $x(t)$ em termos da sua transformada de Fourier é

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{\imath\omega t} \widetilde{x}(\omega) \\
&= \frac{\imath F_0}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{\imath\omega t} \frac{1}{(\omega - \imath\lambda) \left[\omega^2 - \imath\frac{\gamma}{m}\omega - \frac{k}{m} \right]}.
\end{aligned}$$

Para fazer a integral por resíduos, fatoramos o denominador. Usando a fórmula de Báskara, temos as raízes

$$\begin{aligned}
\omega_+ &= \frac{\imath\gamma}{2m} + \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m} \right)^2} \\
&= \frac{\imath\gamma}{2m} + \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m} \right)^2}, \\
\omega_- &= \frac{\imath\gamma}{2m} - \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m} \right)^2} \\
&= \frac{\imath\gamma}{2m} - \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m} \right)^2}.
\end{aligned}$$

Como $\gamma > 0$, os dois polos correspondentes estão no semiplano superior do plano de ω complexo, e como $\lambda > 0$ o terceiro polo também está no semiplano superior. Como queremos a solução para $t > 0$, este é também o semiplano pelo qual devemos fechar a integral no plano de ω complexo, dado o fator $\exp(\imath\omega t)$ presente no integrando. Sendo C um circuito fechado formado pelo eixo real e por um semi-arco no infinito pelo semiplano superior, temos portanto

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{\imath F_0}{2\pi m} \int_C d\omega \, \frac{e^{\imath\omega t}}{(\omega - \imath\lambda)(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)} \\
&= \frac{\imath F_0}{2\pi m} \, 2\pi\imath(R_\lambda + R_+ + R_-) \\
&= \frac{-F_0}{m} \, (R_\lambda + R_+ + R_-),
\end{aligned}$$

onde R_λ, R_+ e R_- são os três resíduos correspondentes. Todos os três polos são polos simples de forma que, usando o método do limite, temos para estes resíduos

$$\begin{aligned}
R_\lambda &= \frac{e^{-\lambda t}}{(\imath\lambda - \omega_+)(\imath\lambda - \omega_-)}, \\
R_+ &= \frac{e^{\imath\omega_+ t}}{(\omega_+ - \imath\lambda)(\omega_+ - \omega_-)}, \\
R_- &= \frac{e^{\imath\omega_- t}}{(\omega_- - \imath\lambda)(\omega_- - \omega_+)},
\end{aligned}$$

Neste ponto o problema analítico já está essencialmente resolvido e podemos portanto tomar o limite $\lambda \to 0$ sem problemas, obtendo assim para os resíduos

$$\begin{aligned}
R_\lambda &= \frac{1}{\omega_+\omega_-}, \\
R_+ &= \frac{e^{\imath\omega_+ t}}{\omega_+(\omega_+ - \omega_-)}, \\
R_- &= \frac{e^{\imath\omega_- t}}{\omega_-(\omega_- - \omega_+)},
\end{aligned}$$

de forma que temos para $x(t)$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{-F_0}{m} \, (R_\lambda + R_+ + R_-) \\
&= \frac{-F_0}{m} \left[\frac{1}{\omega_+\omega_-} + \frac{e^{\imath\omega_+ t}}{\omega_+(\omega_+ - \omega_-)} + \frac{e^{\imath\omega_- t}}{\omega_-(\omega_- - \omega_+)} \right] \\
&= \frac{-F_0}{m} \left[\frac{1}{\omega_+\omega_-} + \frac{\omega_- e^{\imath\omega_+ t}}{\omega_+\omega_-(\omega_+ - \omega_-)} - \frac{\omega_+ e^{\imath\omega_- t}}{\omega_+\omega_-(\omega_+ - \omega_-)} \right] \\
&= \frac{-F_0}{m\omega_+\omega_-} \left(1 + \frac{\omega_- e^{\imath\omega_+ t} - \omega_+ e^{\imath\omega_- t}}{\omega_+ - \omega_-} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de ω_+ e ω_- temos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \\
&+ \frac{F_0}{m\omega_0^2}\, e^{-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)t}\, \frac{\left[\frac{\imath\gamma}{2m} - \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}\right] e^{\imath\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}\,t}}{2\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}} \\
&- \frac{F_0}{m\omega_0^2}\, e^{-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)t}\, \frac{\left[\frac{\imath\gamma}{2m} + \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}\right] e^{-\imath\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}\,t}}{2\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}} \\
&= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \\
&- \frac{F_0}{m\omega_0^2}\, e^{-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)t}\, \frac{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)\sin\left[\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}\,t\right]}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}} \\
&- \frac{F_0}{m\omega_0^2}\, e^{-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)t}\, \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}\cos\left[\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}\,t\right]}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}}.
\end{aligned}
$$

Lembrando que $\omega_0^2 = k/m$ e dando o nome de $\sqrt{\Delta}$ à raiz quadrada que aparece nesta expressão, temos

$$
x(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k}\, \frac{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)\sin\left(\sqrt{\Delta}t\right) + \sqrt{\Delta}\cos\left(\sqrt{\Delta}t\right)}{\sqrt{\Delta}}\, e^{-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)t}.
$$

Não é difícil calcular a derivada temporal desta expressão, obtendo-se

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{F_0}{k}\left(\frac{\gamma}{2m}\right) \frac{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)\sin\left(\sqrt{\Delta}t\right) + \sqrt{\Delta}\cos\left(\sqrt{\Delta}t\right)}{\sqrt{\Delta}}\, e^{-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)t} \\
&\quad - \frac{F_0}{k}\sqrt{\Delta}\, \frac{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)\cos\left(\sqrt{\Delta}t\right) - \sqrt{\Delta}\sin\left(\sqrt{\Delta}t\right)}{\sqrt{\Delta}}\, e^{-\left(\frac{\gamma}{2m}\right)t}.
\end{aligned}
$$

Isto nos permite verificar algumas das propriedades do resultado, pois não é difícil verificar que $x(t) = 0$ e que $\dot{x}(0) = 0$, que são de fato as condições iniciais do problema, bem como que $\dot{x}(\infty) = 0$, como é de se esperar para um movimento amortecido, e em particular que $x(\infty) = F_0/k$, que é de fato a nova posição de equilíbrio do oscilador, com a força externa aplicada.