Física Matemática I - (noturno) - FMA204

Exame 2: 06/07/17

Nome:____

Números das questões escolhidas:__________________________________

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- Ao entrar na sala da prova desligue o seu telefone celular, se estiver com um, e mantenha-o desligado até depois de deixar a sala. Desligue e guarde também mp3 players, CD players, DVD players, rádios, laptops, palmtops e quaisquer outros gadgets eletrônicos.
- Antes de começar a ler a prova coloque o seu nome *completo* nesta primeira folha de prova, que deverá ser devolvida com as folhas de resolução. Coloque o seu nome em *todas* as folhas de resolução, e entregue todas juntas e devidamente ordenadas, na ordem das questões, junto com esta primeira folha de prova.
- Marque claramente nesta primeira folha de prova e nas folhas de resolução os *números das questões* que decidir fazer, usando as frente e os versos de um conjunto de folhas de resolução *diferente* para cada questão. Solicite folhas de resolução adicionais, se for necessário. Não escreva no canto superior esquerdo das folhas, onde elas serão grampeadas.
- **Nunca coloque duas questões diferentes numa mesma folha de resolução.**
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas com *tinta*, e devem estar claramente marcadas nas folhas de resolução.
- Esta prova consiste de 5 questões, e provavelmente não será possível fazer todas elas no tempo disponível. Faça o maior número de questões que puder, escolhendo as questões livremente.
- As questões tem níveis diferentes de dificuldade, mas têm todas o mesmo valor; escolha as questões mais simples para fazer primeiro; faz parte do teste saber reconhecer as questões mais simples.
- Podem existir algumas dependências entre os itens das questões, que devem ser levadas em conta para a escolha; faz parte do teste saber reconhecer estas dependências.
- Leia atentamente *todas* as questões antes de começar a prova, procurando entender com precisão o que é solicitado em cada uma, para poder escolher com segurança.
- Esclareça quaisquer dúvidas que aparecerem sobre a proposição das questões, com o instrutor, logo no *início* da prova.
- Lembre-se de que frequentemente existe uma forma de fazer cada questão que é mais fácil e rápida do que a primeira que vem à mente, portanto não se precipite.
- Há um formulário disponível, que é distribuído junto com as folhas de prova. A menos deste formulário não é permitido fazer consultas de espécie alguma.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou de computadores de qualquer tipo durante a prova.

QUESTÕES

1. Considere uma corda vibrante com densidade linear de massa constante ρ, esticada entre $x = 0$ e $x = L$ com tração $\mathfrak{T}$. No instante $t = 0$ a corda parte da posição $f(x, 0) = 0$ para $0 \leq x \leq L$, com velocidade inicial dada por $\dot{f}(x, 0) = v_0$, para $0 < x < L$, onde v_0 é uma constante dada. A posição transversal $f(x, t)$ da corda satisfaz à equação de ondas unidimensional. O problema consiste de determinar a função $f(x, t)$ para $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$.

   (a) Determine a velocidade ν das ondas na corda, e escreva em detalhe a equação diferencial para esta corda, com as condições de contorno e condições iniciais apropriadas.

   (b) Use a separação de variáveis $X(x)T(t)$ e escreva equações diferenciais ordinárias separadas para $X(x)$ e $T(t)$, bem como as correspondentes condições auxiliares.

   (c) Resolva estas equações diferenciais ordinárias e determine assim uma base, ou seja, um conjunto infinito de soluções $f_k(x, t)$ da equação diferencial e das condições de contorno, que possa ser superposto para representar a solução completa do problema.

   (d) Escreva a solução $f(x, t)$ do problema como uma série infinita, com um índice k referente a x, usando as condições iniciais para determinar os coeficientes a_k e b_k desta série. Determine se a série resultante é convergente e também se ela é uniformemente convergente.

   (e) Escreva a velocidade $\dot{f}(x, t)$ como uma série infinita, e determine se a série resultante é convergente e também se ela é uniformemente convergente.

2. Considere uma placa fina, com espessura L, e muito grande nas duas outras dimensões, de tal forma que a possamos aproximar por uma placa infinita. A placa é feita de um material com coeficientes de difusão térmica K e de difusividade térmica κ. Considere um eixo coordenado x perpendicular às duas superfícies da placa, estando uma delas na posição $x = 0$ e a outra na posição $x = L$.

   Inicialmente a superfície da placa localizada em $x = 0$ está em contato com um reservatório térmico à temperatura $u = -u_0$, a superfície em $x = L$ está em contato com um reservatório térmico à temperatura $u = u_0$, e a placa está numa situação de condução estacionária de calor. No instante $t = 0$ as duas superfícies da placa são colocada em contato com reservatórios térmicos à temperatura $u = 0$. O problema consiste de achar a temperatura $u(x, t)$ para $t \geq 0$, como solução da equação de difusão, satisfazendo a condições de contorno adequadas sobre as duas superfícies externas da placa.

   (a) Escreva explicitamente a equação diferencial para $u(x, t)$, as condições de contorno que $u(x, t)$ satisfaz sobre cada uma das duas superfícies da placa, e a condição inicial que $u(x, t)$ satisfaz no tempo $t = 0$.

   (b) Use a separação de variáveis $X(x)T(t)$, escreva equações diferenciais ordinárias separadas para $X(x)$ e $T(t)$, resolva estas equações diferenciais ordinárias e determine assim uma base, ou seja, um conjunto de soluções particulares $u_k(x, t)$ da equação diferencial e das condições de contorno, que possam ser superpostas para representar a solução do problema.

   (c) Escreva a solução $u(x, t)$ como uma série infinita, com um índice k referente a x, de tal forma que ela satisfaça à equação diferencial e às condições de contorno sobre as duas superfícies da placa; use as condições iniciais do problema para determinar os coeficientes a_k desta série; caracterize a convergência da série que resulta.

(d) Calcule a densidade de fluxo de calor $\vec{\jmath}(x,t) = -K\vec{\nabla}u(x,t)$ em todo o interior da placa, no sistema de coordenadas (x,y); caracterize a convergência da série que resulta; calcule o fluxo total de calor $J(t)$ que atravessa uma unidade de área da superfície localizada em $x = 0$, como função do tempo; faça o mesmo para a superfície localizada em $x = L$.

(e) Calcule a quantidade total de calor $Q(t)$ que atravessa uma unidade de área da superfície localizada em $x = 0$, entre o tempo inicial e o tempo t; faça o mesmo para a superfície localizada em $x = L$; caracterize a convergência das séries que resultam.

3. Considere uma barra longa, de secção quadrada com lado de dimensão L, feita de um material com difusividade térmica κ. A barra é aquecida em um forno até uma temperatura u_2, de forma que esta temperatura seja constante em todo o interior da barra. No instante $t = 0$, a barra é colocada num meio que é um reservatório térmico com temperatura $u_1 < u_2$. Posicione a secção quadrada da barra num sistema de coordenadas (x, y) de tal forma que os quatro vértices estejam nas coordenadas $(0, 0)$, $(0, L)$, $(L, 0)$ e (L, L). O problema consiste de achar a temperatura $u(x, y, t)$ dentro da barra para $t \geq 0$.

   (a) Escreva a equação diferencial que determina a temperatura $u(x, y, t)$ e as condições de contorno que ela satisfaz sobre cada uma das quatro superfícies da barra.

   (b) Use a separação de variáveis $u'(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, para uma temperatura modificada $u'(x, y, t)$ que satisfaça a condições de contorno homogêneas, e escreva equações diferenciais ordinárias para $X(x)$, $Y(y)$ e $T(t)$, incluindo as condições de contorno quando for o caso.

   (c) Escreva a solução $u'(x, y, t)$ como uma série na base adequada de funções, e use as condições iniciais do problema para determinar os coeficientes desta série.

   (d) Determine em que pontos da secção quadrada e em que instantes esta série é convergente. Determine também em que pontos e em que instantes ela é absolutamente convergente.

   (e) Calcule a temperatura no centro da barra, ou seja na posição $(L/2, L/2)$, como função do tempo; escreva a resposta da forma mais explícita que puder.

4. Considere uma placa fina, com espessura L, e muito grande nas duas outras dimensões, de tal forma que a possamos aproximar por uma placa infinita. A placa é feita de um material com coeficientes de difusão térmica K e de difusividade térmica κ. Considere um eixo coordenado x perpendicular às duas superfícies da placa, estando uma delas na posição $x = 0$ e a outra na posição $x = L$.

   Inicialmente a placa está em equilíbrio térmico à temperatura $u = 0$. No instante $t = 0$ a superfície da placa na posição $x = 0$ é colocada em contato com um reservatório térmico à temperatura $-u_0$ e a outra superfície é colocada em contato com um reservatório térmico à temperatura $u_0 > 0$.

   O problema consiste de achar a temperatura $u(x, t)$ para $t \geq 0$, como solução da equação de difusão, satisfazendo a condições de contorno adequadas sobre as duas superfícies externas da placa.

   (a) Use a separação de variáveis $u_b(x, t) = X(x)T(t)$, escreva equações diferenciais ordinárias separadas para $X(x)$ e $T(t)$, e determine completamente a solução estacionária $u_s(x)$ do problema. Determine uma nova função-variável $u'(x, t)$ para o problema, que satisfaça a condições de contorno nulas, e escreva explicitamente a condição inicial que $u'(x, t)$ satisfaz no tempo $t = 0$.

(b) Use a mesma separação de variáveis $u_b(x,t) = X(x)T(t)$, mas agora para $u'(x,t)$, escreva equações diferenciais ordinárias separadas para $X(x)$ e $T(t)$, resolva estas equações diferenciais ordinárias e determine assim uma base, ou seja, um conjunto de soluções particulares $u_k(x,t)$ da equação diferencial e das condições de contorno, que possam ser superpostas para representar a solução do problema.

(c) Escreva a solução $u'(x,t)$ como uma série infinita, com um índice k referente a x, de tal forma que ela satisfaça à equação diferencial e às condições de contorno nulas sobre as duas superfícies da placa; use as condições iniciais do problema para determinar os coeficientes a_k desta série, e determine assim a solução $u(x,t)$; caracterize a convergência da série que resulta.

(d) Calcule a densidade de fluxo de calor $\vec{\jmath}(x,t) = -K\vec{\nabla}u(x,t)$ em todo o interior da placa, no sistema de coordenadas (x,y); caracterize a convergência da série que resulta; calcule o fluxo total de calor $J(t)$ que atravessa uma unidade de área da superfície localizada em $x=0$, como função do tempo; faça o mesmo para a superfície localizada em $x=L$.

(e) Calcule a quantidade total de calor $Q(t)$ que atravessa uma unidade de área da superfície localizada em $x=0$, entre o tempo inicial e o tempo t; faça o mesmo para a superfície localizada em $x=L$; caracterize a convergência das séries que resultam; calcule a quantidade total de calor trocada entre a placa e os reservatórios térmicos, do tempo inicial até o tempo t.

5. Considere uma caixa bidimensional retangular de paredes condutoras, de largura L e altura $2L$, com vértices nas posições (x,y) dadas por $(0,-L)$, $(L,-L)$, $(0,L)$ e (L,L). As paredes da caixa que são paralelas ao eixo y são mantidas no potencial $\phi = 0$, e as paredes da caixa que são paralelas ao eixo x são mantidas no potencial $\phi = V_0$, onde V_0 é uma constante dada. Não há cargas elétricas dentro da caixa. O problema consiste de determinar o potencial elétrico $\phi(x,y)$ em todo o interior da caixa.

(a) Escreva explicitamente a equação diferencial e as condições de contorno que são satisfeitas por $\phi(x,y)$, ao longo do interior da caixa e nas superfícies internas das paredes da mesma.

(b) Usando a separação de variáveis $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$ escreva duas equações diferenciais ordinárias, uma para $X(x)$ e outra para $Y(y)$, escolhendo a constante de separação de tal forma que a equação para $X(x)$ seja elíptica e equação para $Y(y)$ seja hiperbólica. Escreva explicitamente as condições auxiliares que devem ser satisfeitas por $X(x)$ e $Y(y)$.

(c) Resolvendo estas equações diferenciais ordinárias determine e descreva em detalhe uma base que possa ser usada para a resolução deste problema, ou seja, um conjunto infinito de soluções da equação diferencial e das condições de contorno em $x=0$ e em $x=L$, e que esteja de acordo com a simetria do problema em y.

(d) Escreva a solução $\phi(x,y)$ como uma série infinita nesta base, usando as condições de contorno restantes para determinar explicitamente os coeficientes β_k desta série. Escreva a forma final da série para $\phi(x,y)$. Calcule e exiba também as séries que dão as duas componentes cartesianas do gradiente $\vec{\nabla}\phi(x,y)$.

(e) Para cada uma das três séries obtidas acima, determine para que valores de y ela é convergente ao longo de x, para que valores de y ela é absolutamente convergente ao longo de x, e para que valores de y ela é uniformemente convergente no intervalo $[0,L]$ de x.