Métodos de Física Teórica - (noturno) - FMA101

Exame 2: 06/12/19

Nome:____

Números das questões escolhidas:______________________________

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- Ao entrar na sala da prova desligue o seu telefone celular, se estiver com um, e mantenha-o desligado até depois de deixar a sala. Desligue e guarde também mp3 players, CD players, DVD players, rádios, laptops, palmtops e quaisquer outros gadgets eletrônicos.
- Antes de começar a ler a prova coloque o seu nome *completo* nesta primeira folha de prova, que deverá ser devolvida com as folhas de resolução. Coloque o seu nome em *todas* as folhas de resolução, e entregue todas juntas e devidamente ordenadas, na ordem das questões, junto com esta primeira folha de prova.
- Marque claramente nesta primeira folha de prova e nas folhas de resolução os *números das questões* que decidir fazer, usando as frente e os versos de um conjunto de folhas de resolução *diferente* para cada questão. Solicite folhas de resolução adicionais, se for necessário. Não escreva no canto superior esquerdo das folhas, onde elas serão grampeadas.
- **Nunca coloque duas questões diferentes em uma mesma folha de resolução.**
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas com *tinta*, e devem estar claramente marcadas nas folhas de resolução.
- Esta prova consiste de 5 questões, e provavelmente não será possível fazer todas elas no tempo disponível. Faça o maior número de questões que puder, escolhendo as questões livremente.
- As questões tem níveis diferentes de dificuldade, mas têm todas o mesmo valor; escolha as questões mais simples para fazer primeiro; faz parte do teste saber reconhecer as questões mais simples.
- Podem existir algumas dependências entre os itens das questões, que devem ser levadas em conta para a escolha; faz parte do teste saber reconhecer estas dependências.
- Leia atentamente *todas* as questões antes de começar a prova, procurando entender com precisão o que é solicitado em cada uma, para poder escolher com segurança.
- Esclareça quaisquer dúvidas que aparecerem sobre a proposição das questões, com o instrutor, logo no *início* da prova.
- Lembre-se de que frequentemente existe uma forma de fazer cada questão que é mais fácil e rápida do que a primeira que vem à mente, portanto não se precipite.
- Há um formulário disponível, que é distribuído junto com as folhas de prova. A menos deste formulário não é permitido fazer consultas de espécie alguma.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou de computadores de qualquer tipo durante a prova.

QUESTÕES

1. Mostre explicitamente, fazendo as integrais no intervalo de periodicidade $[-L/2, L/2]$, as relações de ortogonalidade do conjunto de funções que constitui a versão real da base de Fourier completa no limite do contínuo,

$$\begin{aligned} &1, \\ &\cos\left(2\pi\frac{kx}{L}\right), \\ &\sin\left(2\pi\frac{kx}{L}\right), \end{aligned}$$

   onde $k \in \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$, separando o trabalho nos seguintes casos:

   (a) Ortogonalidade da função constante com as funções seno.

   (b) Ortogonalidade das funções cosseno com as funções seno.

   (c) Ortogonalidade entre duas funções cosseno diferentes.

   (d) Ortogonalidade entre duas funções seno diferentes.

   Dica: use as identidades trigonométricas que envolvem a soma de dois arcos.

2. Considere a função dente-de-serra de um único ciclo, dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{L} \quad \text{para } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}, \\ f(x) &= 0 \quad \text{para } x = \pm\frac{L}{2}, \end{aligned}$$

   dentro do intervalo de periodicidade $[-L/2, L/2]$, e a sua série de Fourier completa.

   (a) Calcule o coeficiente α_0 da série de Fourier em sua forma real.

   (b) Calcule os coeficientes α_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.

   (c) Calcule os coeficientes β_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.

   (d) Escreva explicitamente a série de Fourier real da função dada.

3. Considere a função dada por $f(x) = |x|$ dentro do intervalo de periodicidade $[-L/2, L/2]$, e a sua série de Fourier completa.

   (a) Calcule o coeficiente α_0 da série de Fourier em sua forma real.

   (b) Calcule os coeficientes α_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.

   (c) Calcule os coeficientes β_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.

   (d) Escreva explicitamente a série de Fourier real da função dada.

4. Considere a função dente-de-serra de dois ciclos, dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x}{L} + 1 \quad \text{para } -\frac{L}{2} < x < 0, \\ f(x) &= \frac{4x}{L} - 1 \quad \text{para } 0 < x < \frac{L}{2}, \\ f(x) &= 0 \qquad\qquad \text{para } x = 0 \text{ ou } x = \pm\frac{L}{2}, \end{aligned}$$

dentro do intervalo de periodicidade $[-L/2, L/2]$, e a sua série de Fourier completa.

(a) Calcule o coeficiente α_0 da série de Fourier em sua forma real.

(b) Calcule os coeficientes α_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.

(c) Calcule os coeficientes β_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.

(d) Escreva explicitamente a série de Fourier real da função dada.

5. Considere uma corda vibrante com densidade linear de massa constante ρ, esticada entre $x = 0$ e $x = L$ com tração $\mathfrak{T}$. No instante $t = 0$ a corda parte da posição $f(x, 0) = 0$ para $0 \leq x \leq L$, com velocidade inicial dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) &= \dot{f}(x, 0) \\ &= v_0, \end{aligned}$$

para $0 < x < L$, onde v_0 é uma constante dada. A posição transversal $f(x, t)$ da corda satisfaz a equação de ondas unidimensional. O problema consiste de determinar a função $f(x, t)$ para $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$. A velocidade ν das ondas na corda é dada por $\nu = \sqrt{\mathfrak{T}/\rho}$.

(a) Use a separação de variáveis $f_b(x, t) = X(x)T(t)$ e escreva equações diferenciais ordinárias separadas para $X(x)$ e $T(t)$, bem como as correspondentes condições auxiliares.

(b) Resolva estas equações diferenciais ordinárias e determine assim uma base, ou seja, um conjunto infinito de soluções da equação de ondas e das condições de contorno, que possa ser superposto para representar a solução completa do problema.

(c) Escreva a solução $f(x, t)$ do problema como uma série infinita, usando as condições iniciais para determinar os coeficientes a_k e b_k desta série.

(d) Escreva a velocidade $\dot{f}(x, t)$ como uma série infinita, e mostre que a velocidade da corda é nula para $x = 0$ e para $x = L$, para todo tempo t.