

Métodos de Física Teórica - (noturno) - FMA101

Exame 1: 25/10/19

Nome: _____

Números das questões escolhidas: _____

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- Ao entrar na sala da prova desligue o seu telefone celular, se estiver com um, e mantenha-o desligado até depois de deixar a sala. Desligue e guarde também mp3 players, CD players, DVD players, rádios, laptops, palmtops e quaisquer outros gadgets eletrônicos.
- Antes de começar a ler a prova coloque o seu nome *completo* nesta primeira folha de prova, que deverá ser devolvida com as folhas de resolução. Coloque o seu nome em *todas* as folhas de resolução, e entregue todas juntas e devidamente ordenadas, na ordem das questões, junto com esta primeira folha de prova.
- Marque claramente nesta primeira folha de prova e nas folhas de resolução os *números das questões* que decidir fazer, usando as frente e os versos de um conjunto de folhas de resolução *diferente* para cada questão. Solicite folhas de resolução adicionais, se for necessário. Não escreva no canto superior esquerdo das folhas, onde elas serão grampeadas.
- **Nunca coloque duas questões diferentes em uma mesma folha de resolução.**
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas com *tinta*, e devem estar claramente marcadas nas folhas de resolução.
- Esta prova consiste de 5 questões, e provavelmente não será possível fazer todas elas no tempo disponível. Faça o maior número de questões que puder, escolhendo as questões livremente.
- As questões tem níveis diferentes de dificuldade, mas têm todas o mesmo valor; escolha as questões mais simples para fazer primeiro; faz parte do teste saber reconhecer as questões mais simples.
- Podem existir algumas dependências entre os itens das questões, que devem ser levadas em conta para a escolha; faz parte do teste saber reconhecer estas dependências.
- Leia atentamente *todas* as questões antes de começar a prova, procurando entender com precisão o que é solicitado em cada uma, para poder escolher com segurança.
- Esclareça quaisquer dúvidas que aparecerem sobre a proposição das questões, com o instrutor, logo no *início* da prova.
- Lembre-se de que frequentemente existe uma forma de fazer cada questão que é mais fácil e rápida do que a primeira que vem à mente, portanto não se precipite.
- Há um formulário disponível, que é distribuído junto com as folhas de prova. A menos deste formulário não é permitido fazer consultas de espécie alguma.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou de computadores de qualquer tipo durante a prova.

QUESTÕES

1. Calcule as derivadas em relação a x das funções reais que seguem, onde a , b e c são constantes reais.

(a) $f(x) = (x^2 + a)^8$.

(b) $f(x) = \sin(ax^2 + bx)$.

(c) $f(x) = \exp(ax^2 + bx)$.

(d) $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$.

2. Calcule as integrais indefinidas reais $f(x)$ em relação a x que seguem, onde a , b e c são constantes reais.

(a)

$$f(x) = \int dx (ax + bx^4 + ce^{-x}).$$

(b)

$$f(x) = \int dx \frac{x}{x^2 + a}.$$

(c)

$$f(x) = \int dx \frac{1}{x^2 - a^2}.$$

(d)

$$f(x) = \int dx \ln(x).$$

3. Partindo das derivadas reais conhecidas, deduza as fórmulas para as derivadas das funções analíticas de uma variável complexa z que seguem.

(a)

$$\begin{aligned} w(z) &= \cosh(z) \\ &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} w(z) &= \sinh(z) \\ &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} w(z) &= \cos(z) \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} w(z) &= \sin(z) \\ &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

4. Calcule as integrais em uma variável complexa z que seguem.

(a)

$$I = \oint_C \frac{z^n}{(z - z_0)^2} dz,$$

para um inteiro n não-negativo, em uma curva fechada C qualquer que dê uma única volta em torno do ponto z_0 . Determine para que combinações de valores de n e z_0 o resultado é nulo.

(b)

$$I = \oint_C \frac{\sqrt{z}}{(z - z_0)^n} dz,$$

para um inteiro n não-negativo, em uma curva fechada C qualquer que dê uma única volta em torno do ponto z_0 e que não contenha a origem. Calcule o limite $z_0 \rightarrow 0$ dos seus resultados. Como você interpreta os seus resultados neste limite?

Dica: use as fórmulas integrais de Cauchy.

(c)

$$I = \oint_C \frac{\sin(z)}{(z - z_0)^2} dz,$$

em uma curva fechada C qualquer que dê uma única volta em torno do ponto z_0 . Determine para que valores de z_0 o resultado é nulo.

Dica: use as fórmulas integrais de Cauchy.

(d)

$$I = \oint_C \frac{\sin(z)}{(z - z_0)^3} dz,$$

em uma curva fechada C qualquer que dê uma única volta em torno do ponto z_0 . Determine para que valores de z_0 o resultado é nulo.

Dica: use as fórmulas integrais de Cauchy.

5. Considere a função complexa $f(z) = 1/(1 - z)$.

(a) Escreva a série de Maclaurin (ou seja a série de Taylor com $z_0 = 0$) de $f(z)$, como uma soma infinita de um termo geral.

(b) Determine o disco de convergência da série.

(c) Diferencie a série para obter uma representação para a função $1/(1 - z)^2$.

(d) Diferencie a série mais uma vez, para obter uma representação para a função $1/(1 - z)^3$.