Física Matemática I - (diurno) - FMA204

Exame 1: 16/10/17

Nome:____

Números das questões escolhidas:________________________________

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- Ao entrar na sala da prova desligue o seu telefone celular, se estiver com um, e mantenha-o desligado até depois de deixar a sala. Desligue e guarde também mp3 players, CD players, DVD players, rádios, laptops, palmtops e quaisquer outros gadgets eletrônicos.
- Antes de começar a ler a prova coloque o seu nome *completo* nesta primeira folha de prova, que deverá ser devolvida com as folhas de resolução. Coloque o seu nome em *todas* as folhas de resolução, e entregue todas juntas e devidamente ordenadas, na ordem das questões, junto com esta primeira folha de prova.
- Marque claramente nesta primeira folha de prova e nas folhas de resolução os *números das questões* que decidir fazer, usando as frente e os versos de um conjunto de folhas de resolução *diferente* para cada questão. Solicite folhas de resolução adicionais, se for necessário. Não escreva no canto superior esquerdo das folhas, onde elas serão grampeadas.
- **Nunca coloque duas questões diferentes numa mesma folha de resolução.**
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas com *tinta*, e devem estar claramente marcadas nas folhas de resolução.
- Esta prova consiste de 5 questões, e provavelmente não será possível fazer todas elas no tempo disponível. Faça o maior número de questões que puder, escolhendo as questões livremente.
- As questões tem níveis diferentes de dificuldade, mas têm todas o mesmo valor; escolha as questões mais simples para fazer primeiro; faz parte do teste saber reconhecer as questões mais simples.
- Podem existir algumas dependências entre os itens das questões, que devem ser levadas em conta para a escolha; faz parte do teste saber reconhecer estas dependências.
- Leia atentamente *todas* as questões antes de começar a prova, procurando entender com precisão o que é solicitado em cada uma, para poder escolher com segurança.
- Esclareça quaisquer dúvidas que aparecerem sobre a proposição das questões, com o instrutor, logo no *início* da prova.
- Lembre-se de que frequentemente existe uma forma de fazer cada questão que é mais fácil e rápida do que a primeira que vem à mente, portanto não se precipite.
- Há um formulário disponível, que é distribuído junto com as folhas de prova. A menos deste formulário não é permitido fazer consultas de espécie alguma.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou de computadores de qualquer tipo durante a prova.

QUESTÕES

1. Considere a função $f(x) = x^2$ dentro do intervalo $[-L/2, L/2]$, e a sua série de Fourier.
   (a) Calcule o coeficiente α_0 da série de Fourier em sua forma real.
   (b) Calcule os coeficientes α_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.
   (c) Calcule os coeficientes β_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.
   (d) Escreva explicitamente e de forma completa a série de Fourier real da função dada.
   (e) Caracterize completamente as propriedades de convergência da série resultante.

2. Considere a seguinte função real dentro do intervalo de periodicidade $[-L/2, L/2]$,

$$f(x) = \left| \sin\left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right|,$$

   e a sua série de Fourier.
   (a) Determine se esta função é contínua no intervalo de periodicidade, e também se é diferenciável, e calcule o coeficiente α_0 da série de Fourier em sua forma real.
   (b) Calcule os coeficientes α_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.
   (c) Calcule os coeficientes β_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.
   (d) Escreva explicitamente e de forma completa a série de Fourier real da função dada.
   (e) Caracterize completamente as propriedades de convergência da série resultante.

3. Considere o oscilador harmônico amortecido, sujeito a uma força externa $F(t)$ de caráter impulsivo, com coordenada de posição $x(t)$, cujo movimento é descrito pela equação diferencial ordinária

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \gamma \frac{d}{dt} x(t) + k\, x(t) = F(t),$$

   para $F(t) = I_0 \delta(t)$, onde aparece a "função" delta de Dirac e todas as constantes são dadas: m é a massa do corpo, γ é o coeficiente de dissipação por atrito, k é a constante de elasticidade da mola, e I_0 é uma constante com unidades de momento linear. A frequência angular própria do oscilador não-amortecido correspondente é $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Assuma que $\omega_0 > \gamma/(2m)$, ou seja, que o sistema tem amortecimento sub-crítico. Para $t < 0$ o oscilador está em repouso. O problema é determinar $x(t)$ para $t > 0$, usando transformadas de Fourier.
   (a) Determine $\widetilde{F}(\omega)$, a transformada de Fourier de $F(t)$.
   (b) Escreva $x(t)$ em termos de sua transformada de Fourier $\widetilde{x}(\omega)$.
   (c) Transforme a equação diferencial para o espaço conjugado, em termos da variável ω.
   (d) Resolva e equação no espaço conjugado, determinando assim $\widetilde{x}(\omega)$.
   (e) Calcule a transformada inversa e determine assim $x(t)$.

4. Considere a função $f(x) = x^2$ para x dentro do intervalo $[0, L]$, e a sua série de Fourier.

   (a) Calcule o coeficiente α_0 da série de Fourier em sua forma real.

   (b) Calcule os coeficientes α_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.

   (c) Calcule os coeficientes β_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.

   (d) Escreva explicitamente e de forma completa a série de Fourier real da função dada.

   (e) Caracterize completamente as propriedades de convergência da série resultante.

5. Considere a equação de movimento de um oscilador harmônico forçado e amortecido, descrito por uma coordenada $x(t)$ de um objeto com massa m, com constante de amortecimento γ e constante de mola k, que é dada por

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \gamma \frac{d}{dt} x(t) + k\, x(t) = F(t),$$

   onde $F(t) = F_0 \cos(\omega_F t)$, sendo F_0 uma constante com dimensões de força e ω_F uma frequência constante dada. Por mera simplicidade, assuma que o sistema tem amortecimento sub-crítico. Em outras palavras, assuma que $\gamma^2 < 4mk$, ou seja, que o coeficiente de amortecimento dissipativo γ é relativamente pequeno. Use para a frequência própria do oscilador não-amortecido a notação $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. O objeto parte do ponto $x(0) = 0$ com velocidade $\dot{x}(0) = 0$ no instante inicial $t = 0$.

   (a) Calcule explicitamente a transformada de Fourier $\widetilde{F}(\omega)$ em relação a t do termo não-homogêneo $F(t)$, usando transformadas de Fourier no contínuo e ω como variável conjugada a t. Além disso, escreva $x(t)$ em termos de sua transformada de Fourier $\widetilde{x}(\omega)$.

   (b) Ache uma solução particular $x_F(t)$ desta equação não-homogênea usando a versão da transformada de Fourier no contínuo; verifique a correção desta sua solução, substituindo-a diretamente na equação não-homogênea.

   (c) Ache a solução geral da equação homogênea correspondente, usando mais uma vez a versão da transformada de Fourier no contínuo; verifique a correção desta sua solução, substituindo-a diretamente na equação homogênea.

   (d) Combinando a solução particular da equação não-homogênea com a solução geral da equação homogênea, determine a solução geral da equação não-homogênea; determine as constantes desta solução geral tais que as condições iniciais estejam satisfeitas.

   (e) Determine uma função analítica $w(z)$, onde $z = \tau + \imath\sigma$ é uma variável no plano de t complexo, que seja uma solução particular da equação não-homogênea estendida para o plano complexo, ou seja, cujas partes real e imaginária sejam ambas soluções particulares da equação; escreva estas partes real e imaginária explicitamente.