Física Matemática I - (noturno) - FMA204

Exame 1: 03/05/18

Nome:____

Números das questões escolhidas:______________________________

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- Ao entrar na sala da prova desligue o seu telefone celular, se estiver com um, e mantenha-o desligado até depois de deixar a sala. Desligue e guarde também mp3 players, CD players, DVD players, rádios, laptops, palmtops e quaisquer outros gadgets eletrônicos.
- Antes de começar a ler a prova coloque o seu nome *completo* nesta primeira folha de prova, que deverá ser devolvida com as folhas de resolução. Coloque o seu nome em *todas* as folhas de resolução, e entregue todas juntas e devidamente ordenadas, na ordem das questões, junto com esta primeira folha de prova.
- Marque claramente nesta primeira folha de prova e nas folhas de resolução os *números das questões* que decidir fazer, usando as frente e os versos de um conjunto de folhas de resolução *diferente* para cada questão. Solicite folhas de resolução adicionais, se for necessário. Não escreva no canto superior esquerdo das folhas, onde elas serão grampeadas.
- **Nunca coloque duas questões diferentes numa mesma folha de resolução.**
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas com *tinta*, e devem estar claramente marcadas nas folhas de resolução.
- Esta prova consiste de 5 questões, e provavelmente não será possível fazer todas elas no tempo disponível. Faça o maior número de questões que puder, escolhendo as questões livremente.
- As questões tem níveis diferentes de dificuldade, mas têm todas o mesmo valor; escolha as questões mais simples para fazer primeiro; faz parte do teste saber reconhecer as questões mais simples.
- Podem existir algumas dependências entre os itens das questões, que devem ser levadas em conta para a escolha; faz parte do teste saber reconhecer estas dependências.
- Leia atentamente *todas* as questões antes de começar a prova, procurando entender com precisão o que é solicitado em cada uma, para poder escolher com segurança.
- Esclareça quaisquer dúvidas que aparecerem sobre a proposição das questões, com o instrutor, logo no *início* da prova.
- Lembre-se de que frequentemente existe uma forma de fazer cada questão que é mais fácil e rápida do que a primeira que vem à mente, portanto não se precipite.
- Há um formulário disponível, que é distribuído junto com as folhas de prova. A menos deste formulário não é permitido fazer consultas de espécie alguma.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou de computadores de qualquer tipo durante a prova.

QUESTÕES

1. Considere a função complexa $w(z) = z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$ onde $n > 1$ é um número inteiro.

   (a) Mostre que $w(z)$ é uma função de múltiplos valores, com n valores diferentes para cada z.

   (b) Mostre que estes n valores estão homogeneamente distribuídos ao longo de um círculo no plano complexo.

   (c) Determine o raio deste círculo e os ângulos correspondentes a cada um dos n possíveis valores, em termos de z.

   (d) Descreva uma superfície de Riemann de n folhas que representa o conjunto-imagem da função; determine o ponto de singularidade.

   (e) Mostre que a função é analítica em toda esta superfície de Riemann, usando as relações de Cauchy-Riemann.

2. Considere a função $w(z) = 3/\sqrt{4 - z}$, onde $z = x + \imath y$ é um número complexo, enquanto x e y são números reais.

   (a) Determine o domínio de analiticidade desta função no plano complexo.

   (b) Escreva a expansão de Taylor de $w(z)$ em torno de $z = 0$, ou seja, a expansão de Maclaurin da função; escreva explicitamente o termo geral da série.

   (c) Determine e descreva o intervalo de convergência da série na reta de x real, ou seja, para $y = 0$.

   (d) Use esta série para definir um método para o cálculo do número irracional $\sqrt{3}$ através de um limite envolvendo apenas números racionais.

   (e) Mostre que cada termo da série usada no item anterior é um número real racional; mostre o mesmo para os elementos da sequência de números que converge para $\sqrt{3}$.

3. Considere a função $f(z) = \sin\left(z^2\right)/z^2$, para $z \neq 0$.

   (a) Escreva a série de Taylor de $\sin\left(z^2\right)$ em torno de $z = 0$; escreva explicitamente o termo geral da série.

   (b) Escreva uma série, baseada na série acima, que represente a função $f(z)$ dentro do domínio onde ela está definida.

   (c) Determine o anel ou disco de convergência desta série, lembrando que a série de $\sin(z)$ converge em todo o plano complexo.

   (d) Calcule o limite de $f(z)$ quando $z \to 0$.

   (e) Como devemos definir o valor de $f(z)$ em $z = 0$, de tal forma que ela seja analítica?

4. Considere a seguinte integral, a ser calculada por resíduos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 2}\, dx.$$

   (a) Estenda esta integral para o plano complexo, escreva-a em termos de uma variável complexa z e descreva o domínio de integração neste plano.
   (b) Fatore completamente o polinômio em denominador, e determine assim as singularidades do integrando.
   (c) Determine como fechar o circuito no plano complexo e quais são as singularidades relevantes.
   (d) Mostre que a integral sobre a parte adicional do circuito, usada para fechá-lo, se anula.
   (e) Calcule os resíduos relevantes e use o teorema de resíduos para achar o valor da integral.

5. Calcule a seguinte integral:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{4}{5 + 4\sin(\theta)}\, d\theta.$$

   Considere os seguintes passos:

   (a) Escreva $\sin(\theta)$ em termos das exponenciais $\exp(\pm\imath\theta)$.
   (b) Mude variáveis na integral, de θ para $z = \exp(\imath\theta)$; para tal escreva $d\theta$ em termos de dz; determine também qual é o caminho de integração no plano de z complexo.
   (c) Escreva a integral transformada como a integral de uma função racional, ou seja, da razão de dois polinômios em z.
   (d) Fatore completamente o polinômio em denominador, e determine assim quais são as singularidades do integrando.
   (e) Calcule os resíduos relevantes e use o teorema de resíduos para achar o valor da integral.