Física Matemática I - (noturno) - FMA204

Exame 1: 11/05/17

Nome:____

Números das questões escolhidas:________________________________

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- Ao entrar na sala da prova desligue o seu telefone celular, se estiver com um, e mantenha-o desligado até depois de deixar a sala. Desligue e guarde também mp3 players, CD players, DVD players, rádios, laptops, palmtops e quaisquer outros gadgets eletrônicos.
- Antes de começar a ler a prova coloque o seu nome *completo* nesta primeira folha de prova, que deverá ser devolvida com as folhas de resolução. Coloque o seu nome em *todas* as folhas de resolução, e entregue todas juntas e devidamente ordenadas, na ordem das questões, junto com esta primeira folha de prova.
- Marque claramente nesta primeira folha de prova e nas folhas de resolução os *números das questões* que decidir fazer, usando as frente e os versos de um conjunto de folhas de resolução *diferente* para cada questão. Solicite folhas de resolução adicionais, se for necessário. Não escreva no canto superior esquerdo das folhas, onde elas serão grampeadas.
- **Nunca coloque duas questões diferentes numa mesma folha de resolução.**
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas com *tinta*, e devem estar claramente marcadas nas folhas de resolução.
- Esta prova consiste de 5 questões, e provavelmente não será possível fazer todas elas no tempo disponível. Faça o maior número de questões que puder, escolhendo as questões livremente.
- As questões tem níveis diferentes de dificuldade, mas têm todas o mesmo valor; escolha as questões mais simples para fazer primeiro; faz parte do teste saber reconhecer as questões mais simples.
- Podem existir algumas dependências entre os itens das questões, que devem ser levadas em conta para a escolha; faz parte do teste saber reconhecer estas dependências.
- Leia atentamente *todas* as questões antes de começar a prova, procurando entender com precisão o que é solicitado em cada uma, para poder escolher com segurança.
- Esclareça quaisquer dúvidas que aparecerem sobre a proposição das questões, com o instrutor, logo no *início* da prova.
- Lembre-se de que frequentemente existe uma forma de fazer cada questão que é mais fácil e rápida do que a primeira que vem à mente, portanto não se precipite.
- Há um formulário disponível, que é distribuído junto com as folhas de prova. A menos deste formulário não é permitido fazer consultas de espécie alguma.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou de computadores de qualquer tipo durante a prova.

QUESTÕES

1. Considere a função dada por $f(x) = |x|$ dentro do intervalo $[-L/2, L/2]$, e a sua série de Fourier.

   (a) Calcule o coeficiente α_0 da série de Fourier em sua forma real.

   (b) Calcule os coeficientes α_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.

   (c) Calcule os coeficientes β_k, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.

   (d) Escreva explicitamente a série de Fourier real da função dada.

   (e) Determine se a série converge, segundo cada um dos tipos de convergência: simples, absoluta e uniforme.

2. Considere a seguinte função real dentro do intervalo de periodicidade $[-L/2, L/2]$,

$$f(x) = \left| \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right|,$$

   e a sua série de Fourier.

   (a) Determine se esta função é contínua no intervalo de periodicidade, e também se é diferenciável.

   (b) Calcule os coeficientes α_k dos cossenos, da série de Fourier real, para $k = 0, \ldots, \infty$.

   (c) Calcule os coeficientes β_k dos senos, da série de Fourier real, para $k = 1, \ldots, \infty$.

   (d) Escreva explicitamente e de forma completa a série de Fourier real da função dada.

   (e) Esta série é convergente? Ela é uniformemente convergente?

3. Considere a função $\varphi(x)$ que é dada no intervalo periódico $[-L/2, L/2]$ por

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= 0 \quad \text{para} \quad -\frac{L}{2} \le x < -\frac{L}{4}, \\
\varphi(x) &= \frac{1}{2} \quad \text{para} \quad x = -\frac{L}{4}, \\
\varphi(x) &= 1 \quad \text{para} \quad -\frac{L}{4} < x < \frac{L}{4}, \\
\varphi(x) &= \frac{1}{2} \quad \text{para} \quad x = \frac{L}{4}, \\
\varphi(x) &= 0 \quad \text{para} \quad \frac{L}{4} < x \le \frac{L}{2},
\end{aligned}
$$

e a sua série de Fourier completa, em sua forma real.

(a) Calcule o coeficiente α_0 da série de Fourier real no intervalo periódico $[-L/2, L/2]$.

(b) Calcule os coeficientes α_k, para $k > 0$, da série de Fourier real no intervalo periódico $[-L/2, L/2]$.

(c) Calcule os coeficientes β_k, para $k > 0$, da série de Fourier real no intervalo periódico $[-L/2, L/2]$.

(d) Escreva explicitamente a série de Fourier, como uma soma de um termo geral, e determine se ela é absoluta e/ou uniformemente convergente no intervalo periódico $[-L/2, L/2]$.

(e) Determine se a série é simplesmente convergente no intervalo periódico $[-L/2, L/2]$; determine os pontos especiais que existem e analise em detalhe o comportamento da série nestes pontos.

4. Considere o oscilador harmônico amortecido, sujeito a uma força externa $F(t)$ de caráter impulsivo, com coordenada de posição $x(t)$, cujo movimento é descrito pela equação diferencial ordinária

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t) + \gamma\frac{\partial}{\partial t}x(t) + kx(t) = F(t) = I_0\delta(t),$$

onde aparece a "função" delta de Dirac e todas as constantes são dadas: m é a massa do corpo, γ é o coeficiente de dissipação por atrito, k é a constante de elasticidade da mola, e I_0 é uma constante com unidades de momento linear. A frequência angular própria do oscilador não-amortecido correspondente é $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Assuma que $\omega_0 > \gamma/(2m)$, ou seja, que o sistema tem amortecimento sub-crítico. Para $t < 0$ o oscilador está em repouso. O problema é determinar $x(t)$ para $t > 0$, usando transformadas de Fourier.

   (a) Determine $\widetilde{F}(\omega)$, a transformada de Fourier de $F(t)$.
   (b) Escreva $x(t)$ em termos de sua transformada de Fourier $\widetilde{x}(\omega)$.
   (c) Transforme a equação diferencial para o espaço conjugado, em termos da variável ω.
   (d) Resolva e equação no espaço conjugado, determinando assim $\widetilde{x}(\omega)$.
   (e) Calcule a transformada inversa e determine assim $x(t)$.

5. Considere o oscilador harmônico amortecido, sujeito a uma força externa $F(t)$ de caráter descontínuo, com coordenada de posição $x(t)$, cujo movimento é descrito pela equação diferencial ordinária

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t) + \gamma\frac{\partial}{\partial t}x(t) + kx(t) = F(t) = F_0\theta(t),$$

onde aparece a função-degrau $\theta(t)$ de Heaviside, que é 0 para $t < 0$ e 1 para $t > 0$, e todas as constantes são dadas: m é a massa do corpo, γ é o coeficiente de dissipação por atrito, k é a constante de elasticidade da mola, e F_0 é uma constante com unidades de força. A frequência angular própria do oscilador não-amortecido correspondente é $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Assuma que $\omega_0 > \gamma/(2m)$, ou seja, que o sistema tem amortecimento sub-crítico. Para $t < 0$ o oscilador está em repouso.

O problema é determinar $x(t)$ para $t > 0$, usando transformadas de Fourier. Regularize as integrais assintóticas que aparecerem, se e quando isto for necessário, usando um fator $\exp(-\lambda|t|)$, onde λ é um parâmetro positivo.

   (a) Determine $\widetilde{F}(\omega)$, a transformada de Fourier de $F(t)$; considere regularizar a integral e fazer uma integração por partes.
   (b) Escreva $x(t)$ em termos de sua transformada de Fourier $\widetilde{x}(\omega)$.
   (c) Transforme a equação diferencial para o espaço conjugado, em termos da variável ω.
   (d) Resolva e equação no espaço conjugado, determinando assim $\widetilde{x}(\omega)$.
   (e) Calcule a transformada inversa e determine assim $x(t)$; se houver algum polo sobre o circuito de integração, *não* use o valor principal de Cauchy, em vez disso deforme o circuito de forma a incluir completamente o polo no circuito.