Física III - (noturno) - FGE211

Exame de Recuperação: 05/02/16

GABARITO

1. Por simetria, para $z = 0$ tanto o potencial ϕ quanto o campo $\vec{E}$ só podem depender de ρ, e $\vec{E}$ tem de estar na direção de $\hat{\rho}$.

   (a) Calculando o potencial por integração, através da lei de Coulomb, temos para o elemento de carga

   $$dq = \alpha|z|dz,$$

   de forma que o potencial é dado por

   $$\begin{aligned}\phi(\rho,\theta,0) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L} dz\,\frac{\alpha|z|}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ &= \frac{2\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{L} dz\,\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}},\end{aligned}$$

   uma vez que o integrando é par em z. A integral pode agora ser feita facilmente, pois temos no denominador a derivada do argumento da raiz quadrada, de forma que temos

   $$\begin{aligned}\phi(\rho,\theta,0) &= \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\sqrt{\rho^2+z^2}\,\Big[_0^L \\ &= \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho\right),\end{aligned}$$

   uma vez que ρ é positivo. Observe que esta expressão vai a zero quando $\rho \to \infty$. Temos portanto nossa resposta,

   $$\boxed{\phi(\rho,\theta,0) = \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho\right),}$$

   para todo ρ e todo θ.

   (b) Podemos calcular $\vec{E}(\rho,\theta,0)$ de duas formas. Em primeiro lugar, podemos tomar o gradiente de $\phi(\rho,\theta,0)$ no plano $z = 0$, e escrevendo o gradiente em coordenadas esféricas temos

   $$\begin{aligned}\vec{E}(\rho,\theta,0) &= -\vec{\nabla}\phi(\rho,\theta,0) \\ &= -\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\phi(\rho,\theta,0)\right]\hat{\rho} \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}}-1\right)\hat{\rho} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}}\,\hat{\rho}.\end{aligned}$$

Observe que, mais uma vez, esta expressão vai a zero quando $\rho \to \infty$. Temos portanto nossa resposta,

$$\boxed{\vec{E}(\rho,\theta,0) = \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}}\,\hat{\rho},}$$

para todo ρ e todo θ. Esta resposta também pode ser obtida por integração direta. Neste caso, considerando o elemento de carga que calculamos no item anterior, e levando em conta o fator de projeção das contribuições para $E_\rho(\rho,\theta,0)$ sobre o plano, temos

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\rho,\theta,0) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L} dz\,\frac{\alpha|z|}{\rho^2+z^2}\,\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\,\hat{\rho}\\
&= \frac{2\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{L} dz\,\frac{z}{\rho^2+z^2}\,\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\,\hat{\rho}\\
&= \frac{\alpha\rho}{2\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{L} dz\,\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}^{\,3}}\,\hat{\rho},
\end{aligned}$$

onde trabalhamos a integral de forma semelhante à que foi usada antes para o potencial. A integral pode agora ser feita de forma simples, e obtemos

$$\begin{aligned}
E_\rho(\rho,\theta,0) &= \frac{\alpha\rho}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{(-1)}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\Bigg[_0^L\\
&= \frac{\alpha\rho}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+L^2}}\right)\\
&= \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}},
\end{aligned}$$

uma vez que ρ é positivo. Temos portanto a mesma resposta de antes para o campo elétrico,

$$\boxed{\vec{E}(\rho,\theta,0) = \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}}\,\hat{\rho},}$$

para todo ρ e todo θ.

(c) Como não temos o potencial escrito explicitamente como função de z, não podemos calcular diretamente a primeira derivada. Entretanto, como temos que, por simetria, para $z=0$ o vetor $\vec{E}$ está na direção de $\hat{\rho}$, temos que $E_z(\rho,\theta,0)=0$. Por outro lado, esta componente é dada pela componente correspondente do gradiente de ϕ,

$$E_z(\rho,\theta,0) = -\frac{\partial\phi}{\partial z}(\rho,\theta,0),$$

de forma que temos imediatamente a nossa resposta,

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial z}(\rho,\theta,0) = 0,}$$

para todo ρ e todo θ.

(d) Como não temos o potencial escrito explicitamente como função de z, não podemos calcular diretamente a segunda derivada. Entretanto, o potencial ϕ satisfaz à equação de Laplace no plano $z = 0$, no qual não há cargas. Escrevendo esta equação em coordenadas cilíndricas temos, uma vez que ϕ não depende de fato de θ,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\phi\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi = 0.$$

Podemos aplicar o primeiro termo desta equação em $z = 0$ antes de tomar as derivadas em relação a ρ, uma vez que trata-se de derivadas parciais, tomadas portanto com z constante. Temos portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}(\rho,\theta,0) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\phi(\rho,\theta,0)\right] \\
&= -\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho\right)\right] \\
&= -\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+L^2}}-\rho\right) \\
&= -\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{\sqrt{\rho^2+L^2}}-\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+L^2}^3}-\frac{1}{\rho}\right),
\end{aligned}$$

para todo ρ e todo θ. Simplificando, temos portanto nossa resposta,

$$\boxed{\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}(\rho,\theta,0) = \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{\rho^2+2L^2}{\sqrt{\rho^2+L^2}^3}\right),}$$

para todo ρ e todo θ.

2. É preciso usar o princípio da superposição, calcular separadamente o potencial e o campo da densidade de carga e superpor com o potencial ou campo do dipolo, lembrando que o dipolo tem carga total nula. Vamos escrever o potencial e o campo como

$$\begin{aligned}
\phi(r,\theta,\varphi) &= \phi_p(r,\theta,\varphi) + \phi_q(r,\theta,\varphi), \\
\vec{E}(r,\theta,\varphi) &= \vec{E}_p(r,\theta,\varphi) + \vec{E}_q(r,\theta,\varphi),
\end{aligned}$$

onde o índice p refere-se ao dipolo e o índice q refere-se às cargas. Por simetria tanto o potencial ϕ_q quanto o campo $\vec{E}_q$ da densidade de cargas ρ só podem depender de r, e $\vec{E}_q$ tem de estar da direção de $\hat{r}$. Neste caso é mais fácil calcular primeiro o campo elétrico, usando a lei de Gauss e coordenadas esféricas, assim a ordem de alguns dos itens deve ser invertida.

(a) Integrando a densidade de carga $\rho(r,\theta,\varphi)$ entre $r = 0$ e um valor qualquer de $r \leq R$, obtemos a carga dentro da esfera de raio r,

$$\begin{aligned}
Q(r) &= \int_0^r dr' \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, r'^2 \sin(\theta)\rho\big(r',\theta,\varphi\big) \\
&= \rho_0 \int_0^r dr' \int_{-1}^1 d[\cos(\theta)] \int_0^{2\pi} d\varphi\, r'^2 \left(1-\frac{r'}{R}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\pi\rho_0 \int_0^r dr' \left(r'^2 - \frac{r'^3}{R} \right) \\
&= 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} \right),
\end{aligned}
$$

para $0 \leq r \leq R$. Simplificando, temos portanto nossa resposta,

$$
\boxed{Q(r) = \pi\rho_0 r^3 \left(\frac{4}{3} - \frac{r}{R} \right),}
$$

para $0 \leq r \leq R$. Para $r \geq R$ temos uma carga total fixa de valor $Q(R)$, de forma que temos a resposta

$$
\boxed{Q(r) = \frac{\pi\rho_0 R^3}{3},}
$$

para $r \geq R$.

(b) O potencial do dipolo é dado no formulário, e aplicando para um dipolo localizado na origem temos

$$
\phi_p(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3},
$$

onde $\vec{p} \cdot \vec{r} = pr\cos(\theta)$, de forma que obtemos

$$
\phi_p(r, \theta, \varphi) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos(\theta)}{r^2},
$$

para todo $r > 0$. Se usarmos o padrão de que o potencial é zero no infinito, podemos agora calcular o potencial ϕ_q fazendo uma integral de linha do campo $\vec{E}_q$ ao longo de um raio. Para isto temos que

$$
\phi_q(r) - \phi_q(\infty) = -\int_\infty^r \vec{E}_q \cdot d\vec{\ell}.
$$

Como $\phi_q(\infty) = 0$, e usando o valor de $\vec{E}_q$ obtido no terceiro item, além do fato de que $d\vec{\ell} = dr\,\hat{r}$, temos, para $0 \leq r \leq R$,

$$
\begin{aligned}
\phi_q(r) &= -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \left[\int_\infty^R dr' \frac{R^3}{3r'^2} + \int_R^r dr' \left(\frac{4r'}{3} - \frac{r'^2}{R} \right) \right] \\
&= -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \left[\frac{-R^3}{3r'} \Bigg[_\infty^R + \left(\frac{2r'^2}{3} - \frac{r'^3}{3R} \right) \Bigg[_R^r \right] \\
&= -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \left[\frac{-R^2}{3} + \left(\frac{2r^2}{3} - \frac{r^3}{3R} \right) - \left(\frac{2R^2}{3} - \frac{R^2}{3} \right) \right] \\
&= \frac{\rho_0}{12\varepsilon_0} \left(2R^2 - 2r^2 + \frac{r^3}{R} \right),
\end{aligned}
$$

para $0 \leq r \leq R$. Para $r \geq R$ temos a integral

$$\begin{aligned}\phi_q(r) &= -\frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0}\int_\infty^r dr'\,\frac{1}{r'^2}\\ &= -\frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0}\,\frac{-1}{r'}\Big[_\infty^r\\ &= \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}.\end{aligned}$$

para $r \geq R$. Temos portanto nossa resposta para o potencial dentro da esfera, somando as duas partes

$$\boxed{\phi(r) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cos(\theta)}{r^2} + \frac{\rho_0}{12\pi\varepsilon_0}\left(2R^2 - 2r^2 + \frac{r^3}{R}\right),}$$

para $0 < r \leq R$. Além disto, fora da esfera o potencial é dado por

$$\boxed{\phi(r) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cos(\theta)}{r^2} + \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0}\,\frac{1}{r},}$$

ou seja, para $R \leq r$.

(c) Para calcular o campo do dipolo, tomamos o gradiente de ϕ_p usando coordenadas esféricas. Partimos do potencial elétrico de um dipolo na origem,

$$\phi(r) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cos(\theta)}{r^2},$$

lembrando que o campo é menos o gradiente do potencial, e que o gradiente em coordenadas esféricas é dado por

$$\vec{\nabla}\phi = \left(\partial_r\phi, \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\phi, \frac{1}{r\sin(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\phi\right).$$

Como ϕ_p só depende de fato de r e θ, teremos apenas duas componentes,

$$\begin{aligned}E_r(r,\theta) &= -\frac{\partial}{\partial r}\phi(r,\theta)\\ &= -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\partial}{\partial r}\frac{\cos(\theta)}{r^2}\\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2\cos(\theta)}{r^3},\\ E_\theta(r,\theta) &= -\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\phi(r,\theta)\\ &= -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\cos(\theta)}{r^2}\\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sin(\theta)}{r^3}.\end{aligned}$$

Lembrando agora que temos a relação entre versores

$$\begin{aligned}\hat{z} &= \cos(\theta)\,\hat{r} - \sin(\theta)\,\hat{\theta} \quad\Rightarrow\\ \sin(\theta)\,\hat{\theta} &= \cos(\theta)\,\hat{r} - \hat{z},\end{aligned}$$

podemos escrever para $\vec{E}_p$

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_p &= E_r(r,\theta)\,\hat{r} + E_\theta(r,\theta)\,\hat{\theta} \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\left[2\cos(\theta)\,\hat{r} + \sin(\theta)\,\hat{\theta}\right] \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^3}\left[2\cos(\theta)\,\hat{r} + \cos(\theta)\,\hat{r} - \hat{z}\right] \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3\cos(\theta)\,\hat{r} - \hat{z}}{r^3} \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3(\hat{z}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \hat{z}}{r^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \vec{p}}{r^3}.
\end{aligned}
$$

Para calcular $\vec{E}_q$ vamos usar a lei de Gauss em uma esfera de raio r centrada na origem. A carga total $Q(r)$ como função de r foi calculada anteriormente, de forma que temos para o fluxo de $\vec{E}$, usando a lei de Gauss,

$$
\begin{aligned}
4\pi r^2 E_r(r) &= \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \\
E_r(r) &= \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.
\end{aligned}
$$

Segue que para o caso $0 < r \leq R$ temos

$$
\vec{E}_q(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\,r\left(\frac{4}{3} - \frac{r}{R}\right)\hat{r},
$$

e para $r \geq R$ temos

$$
\vec{E}_q(r) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}.
$$

Temos portanto nossa resposta para $\vec{E}$ dentro da esfera, somando as duas partes,

$$
\boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \vec{p}}{r^3} + \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\,r\left(\frac{4}{3} - \frac{r}{R}\right)\hat{r},}
$$

para $0 < r \leq R$. Além disto, fora da esfera o campo é dado por

$$
\boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \vec{p}}{r^3} + \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r},}
$$

ou seja, para $r \geq R$.

(d) Como não há quaisquer fontes do campo magnético, ele é identicamente zero, e temos imediatamente nossa resposta,

$$
\boxed{\vec{B}(r,\theta,\varphi) = \vec{0},}
$$

para todo r, todo θ e todo φ.

3. (a) A componente que permanece constante é aquela na direção de $\hat{z}$, paralela ao campo $\vec{B}$, uma vez que a força magnética é perpendicular a $\vec{B}$ e portanto não tem componente nesta direção. Esta componente da velocidade é dada por

$$\boxed{v_z = \frac{\sqrt{3}}{2}\, v_0.}$$

(b) Sim, o módulo da projeção da velocidade no plano $z = 0$ permanece constante, pois a força magnética é constantemente perpendicular a esta projeção da velocidade. Este módulo é dado por

$$\boxed{\frac{v_0}{2}.}$$

(c) Igualando a força magnética à força centrípeta, temos

$$q_0 \left(\frac{v_0}{2}\right) B_0 = m_0 \frac{(v_0/2)^2}{R}.$$

Segue que temos para o raio da órbita circular

$$R = \frac{m_0 v_0}{2 q_0 B_0}.$$

Calculando agora a frequência angular temos

$$\begin{aligned} w &= \frac{(v_0/2)}{R} \\ &= \frac{q_0 B_0}{m_0}. \end{aligned}$$

Temos portanto nossa resposta, que não depende de todo da velocidade,

$$\boxed{w = \frac{q_0 B_0}{m_0}.}$$

(d) Como o raio R da órbita foi calculado no item anterior, temos a nossa resposta

$$\boxed{R = \frac{m_0 v_0}{2 q_0 B_0}.}$$

4. (a) Vamos calcular o fluxo $\Phi_{B,\text{in}}$ do campo $\vec{B}$ durante a entrada da espira na região onde existe o campo. Como temos que $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ com B_0 constante, o fluxo é o produto de B_0 pela área da espira que está dentro da região. Adotando como $t = 0$ o momento da entrada da espira na região, e colocando o versor normal da área da espira na direção $\hat{z}$, temos portanto

$$\Phi_{B,\text{in}}(t) = B_0 a_0 v_0 t.$$

Segue que a força eletromotriz correspondente é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\rm in} &= -\frac{d}{dt}\Phi_{B,{\rm in}}(t)\\ &= -B_0 a_0 v_0.\end{aligned}$$

Como o resultado é negativo, a força eletromotriz está na direção negativa do circuito. O mesmo é então verdadeiro para a corrente, e temos portanto nossa resposta

$$\boxed{I_{\rm in} = -\frac{B_0 a_0 v_0}{R_0}.}$$

A direção de orientação da corrente é $-\hat{z}$. Ao final do processo de entrada da espira o fluxo é dado pela condição $v_0 t = b_0$, e temos portanto para este valor final $\Phi_{B,0}$

$$\Phi_{B,0} = B_0 a_0 b_0.$$

(b) Vamos agora calcular o fluxo $\Phi_{B,{\rm out}}$ do campo $\vec{B}$ durante a saída da espira da região onde existe o campo. Como temos que $\vec{B} = B_0\hat{z}$ com B_0 constante, o fluxo é o produto de B_0 pela área da espira que está dentro da região. Adotando como $t = 0$ o momento da saída da espira na região, no qual temos o fluxo $\Phi_{B,0}$, e colocando o versor normal da área da espira na direção $\hat{z}$, temos portanto

$$\Phi_{B,{\rm out}}(t) = \Phi_{B,0} - B_0 a_0 v_0 t.$$

Segue que a força eletromotriz correspondente é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\rm out} &= -\frac{d}{dt}\Phi_{B,{\rm out}}(t)\\ &= B_0 a_0 v_0.\end{aligned}$$

Como o resultado é positivo, a força eletromotriz está na direção positiva do circuito. O mesmo é então verdadeiro para a corrente, e temos portanto nossa resposta

$$\boxed{I_{\rm out} = \frac{B_0 a_0 v_0}{R_0}.}$$

A direção de orientação da corrente é $\hat{z}$. Ao final do processo de saída da espira o fluxo volta a ser nulo.

(c) O elemento de força magnética sobre um elemento de circuito descrito por $d\vec{\ell}$, que carrega uma corrente I, é dado por

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

O trecho relevante do circuito é o segmento de comprimento a_0 que está à frente, orientado ao longo da direção $-\hat{x}$, e portanto com a corrente I correndo ao longo de $-\hat{x}$. Como $\vec{B}$ é um campo constante, temos

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\rm in} &= -I_{\rm in} a_0 B_0 \hat{x} \times \hat{z}\\ &= \frac{B_0 a_0 v_0}{R_0}\, a_0 B_0(-\hat{y})\\ &= -\frac{B_0^2 a_0^2 v_0}{R_0}\,\hat{y}.\end{aligned}$$

Temos portanto nossa resposta

$$\boxed{\vec{F}_{\rm in} = -\frac{B_0^2 a_0^2 v_0}{R_0}\,\hat{y}.}$$

Note-se que, como a velocidade está na direção $\hat{y}$, esta força está na direção contrária à da velocidade.

(d) O elemento de força magnética sobre um elemento de circuito descrito por $d\vec{\ell}$, que carrega uma corrente I, é dado por

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

O trecho relevante do circuito é o segmento de comprimento a_0 que está atrás, orientado ao longo da direção $\hat{x}$, e portanto com a corrente I correndo ao longo de $\hat{x}$. Como $\vec{B}$ é um campo constante, temos

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\rm out} &= I_{\rm out} a_0 B_0 \hat{x} \times \hat{z}\\ &= \frac{B_0 a_0 v_0}{R_0}\, a_0 B_0(-\hat{y})\\ &= -\frac{B_0^2 a_0^2 v_0}{R_0}\,\hat{y}.\end{aligned}$$

Temos portanto nossa resposta

$$\boxed{\vec{F}_{\rm out} = -\frac{B_0^2 a_0^2 v_0}{R_0}\,\hat{y}.}$$

Note-se que, mais uma vez, como a velocidade está na direção $\hat{y}$, esta força está na direção contrária à da velocidade.

5. A primeira coisa a se fazer é resolver o circuito, ou seja, achar a corrente $I(t)$ em regime estacionário. Usando a lei das malhas no circuito, e usando a notação complexa, temos

$$\begin{aligned}L_0\dot{I}(t) + R_0 I(t) + \frac{Q(t)}{C_0} &= \varepsilon_0\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} \quad \Rightarrow\\ L_0\ddot{I}(t) + R_0\dot{I}(t) + \frac{I(t)}{C_0} &= \imath\omega\varepsilon_0\,\mathrm{e}^{\imath\omega t},\end{aligned}$$

onde Q é a carga no capacitor, e onde estamos usando pontos para indicar derivadas temporais. Usando para a corrente a forma estacionária mais geral,

$$I(t) = I_0\,\mathrm{e}^{\imath\omega t},$$

onde a constante I_0 pode ser complexa, temos

$$\begin{aligned}\dot{I}(t) &= \imath\omega I_0\,\mathrm{e}^{\imath\omega t},\\ \ddot{I}(t) &= -\omega^2 I_0\,\mathrm{e}^{\imath\omega t}.\end{aligned}$$

O problema se reduz então à determinação de I_0. Substituindo a corrente e suas derivadas temos para a nossa equação

$$\begin{aligned}
-L_0\omega^2 I_0\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} + \imath R_0\omega I_0\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} + \frac{1}{C_0}\,I_0\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} &= \imath\omega\varepsilon_0\,\mathrm{e}^{\imath\omega t} \quad \Rightarrow \\
-L_0\omega^2 I_0 + \imath R_0\omega I_0 + \frac{1}{C_0}\,I_0 &= \imath\omega\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \\
I_0\left(\frac{1}{C_0\omega} - L_0\omega + \imath R_0\right) &= \imath\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \\
I_0(X_C - X_L + \imath R_0) &= \imath\varepsilon_0,
\end{aligned}$$

onde $X_C(\omega) = 1/(C_0\omega)$ e $X_L(\omega) = L_0\omega$. Temos portanto para I_0

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{\imath\varepsilon_0}{X_C - X_L + \imath R_0} \\
&= \frac{\imath\varepsilon_0(X_C - X_L - \imath R_0)}{(X_C - X_L)^2 + R_0^2} \\
&= \varepsilon_0\,\frac{R_0 + \imath(X_C - X_L)}{(X_C - X_L)^2 + R_0^2} \\
&= \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2}}\,\frac{R_0 + \imath(X_C - X_L)}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2}}.
\end{aligned}$$

O segundo destes dois fatores é uma fase complexa, que vamos denominar de $\exp(\imath\phi_0)$. O outro fator é uma amplitude real. Temos portanto para a corrente estacionária

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2}}\,\mathrm{e}^{\imath(\omega t + \phi_0)}$$

Observe que nesta amplitude apenas a diferença $X_C - X_L$ depende de ω. Vamos chamar esta diferença de $\chi(\omega) = X_C - X_L$ e portanto escrever que

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\chi^2(\omega) + R_0^2}}\,\mathrm{e}^{\imath(\omega t + \phi_0)}.$$

Como temos a corrente, podemos agora escrever as quedas de tensão no indutor, no resistor e no capacitor, obtendo

$$\begin{aligned}
U_L &= L_0\dot{I}(t) \\
&= \frac{\imath L_0\omega\varepsilon_0}{\sqrt{\chi^2(\omega) + R_0^2}}\,\mathrm{e}^{\imath(\omega t + \phi_0)}, \\
U_R &= R_0 I(t) \\
&= \frac{R_0\varepsilon_0}{\sqrt{\chi^2(\omega) + R_0^2}}\,\mathrm{e}^{\imath(\omega t + \phi_0)}, \\
U_C &= \frac{Q(t)}{C_0} \\
&= \frac{\varepsilon_0}{\imath C_0\omega\sqrt{\chi^2(\omega) + R_0^2}}\,\mathrm{e}^{\imath(\omega t + \phi_0)}.
\end{aligned}$$

Cada uma destas expressões representa um vetor que dá voltas em torno da origem no plano complexo, e a amplitude é o raio do círculo percorrido pelo vetor. Assim, podemos obter as amplitudes simplesmente tomando os módulos destas expressões,

$$\begin{aligned}
A_L &= \frac{L_0\omega\varepsilon_0}{\sqrt{\chi^2(\omega)+R_0^2}} \\
&= \varepsilon_0\,\frac{X_L}{\sqrt{(X_C-X_L)^2+R_0^2}}, \\
A_R &= \frac{R_0\varepsilon_0}{\sqrt{\chi^2(\omega)+R_0^2}} \\
&= \varepsilon_0\,\frac{R_0}{\sqrt{(X_C-X_L)^2+R_0^2}}, \\
A_C &= \frac{\varepsilon_0}{C_0\omega\sqrt{\chi^2(\omega)+R_0^2}} \\
&= \varepsilon_0\,\frac{X_C}{\sqrt{(X_C-X_L)^2+R_0^2}}.
\end{aligned}$$

Observe que a amplitude da voltagem no resistor e a amplitude A_I da corrente se relacionam por $A_R = R_0 A_I$, de forma que temos

$$A_I = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(X_C-X_L)^2+R_0^2}}.$$

O menor valor possível de cada uma destas amplitudes zero, e o maior valor que devemos esperar é dado por ε_0, a amplitude do gerador. Note-se que temos os seguintes limites,

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0} X_L &= 0, \\
\lim_{\omega\to\infty} X_L &= \infty, \\
\lim_{\omega\to 0} X_C &= \infty, \\
\lim_{\omega\to\infty} X_C &= 0.
\end{aligned}$$

(a) Consideremos a amplitude no capacitor,

$$A_C = \varepsilon_0\,\frac{X_C}{\sqrt{(X_C-X_L)^2+R_0^2}}.$$

Quando $\omega \to \infty$ temos que isto se reduz a

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to\infty} A_C &= \varepsilon_0 \lim_{\omega\to\infty} \frac{X_C}{\sqrt{X_L^2+R_0^2}} \\
&= \varepsilon_0 \lim_{\omega\to\infty} \frac{X_C}{\sqrt{X_L^2}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, a amplitude vai a zero neste limite. Por outro lado, quando $\omega \to 0$ temos que a amplitude se reduz a

$$
\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0} A_C &= \varepsilon_0 \lim_{\omega\to 0} \frac{X_C}{\sqrt{X_C^2 + R_0^2}} \\
&= \varepsilon_0 \lim_{\omega\to 0} \frac{X_C}{\sqrt{X_C^2}} \\
&= \varepsilon_0,
\end{aligned}
$$

que é o valor máximo. Temos portanto nossa resposta para o limite de máximo,

$$
\boxed{\lim_{\omega\to 0} A_C = \varepsilon_0.}
$$

(b) Consideremos a amplitude no indutor,

$$
A_L = \varepsilon_0 \frac{X_L}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2}},
$$

Quando $\omega \to 0$ temos que isto se reduz a

$$
\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0} A_L &= \varepsilon_0 \lim_{\omega\to 0} \frac{X_L}{\sqrt{X_C^2 + R_0^2}} \\
&= \varepsilon_0 \lim_{\omega\to 0} \frac{X_L}{\sqrt{X_C^2}} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

ou seja, a amplitude vai a zero neste limite. Por outro lado, quando $\omega \to \infty$ temos que a amplitude se reduz a

$$
\begin{aligned}
\lim_{\omega\to \infty} A_L &= \varepsilon_0 \lim_{\omega\to \infty} \frac{X_L}{\sqrt{X_L^2 + R_0^2}} \\
&= \varepsilon_0 \lim_{\omega\to \infty} \frac{X_L}{\sqrt{X_L^2}} \\
&= \varepsilon_0,
\end{aligned}
$$

que é o valor máximo. Temos portanto nossa resposta para o limite de máximo,

$$
\boxed{\lim_{\omega\to \infty} A_L = \varepsilon_0.}
$$

(c) O valor máximo da amplitude da corrente coincide com o valor máximo da amplitude da queda de tensão no resistor. Consideremos portanto a amplitude no resistor,

$$
A_R = \varepsilon_0 \frac{R_0}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2}}.
$$

Neste caso tanto no limite $\omega \to 0$ quanto no limite $\omega \to \infty$ a amplitude vai a zero, pois uma das duas quantidades em denominador, X_C ou X_L, vai ao infinito. Isto indica que há um máximo local em algum valor finito e não-nulo de ω. Para achar este máximo podemos calcular a derivada em relação a ω e igualamos a zero. Como o numerador não depende de ω, um máximo da razão mostrada corresponde a um mínimo do denominador, e portanto basta calcular e igualar a zero a derivada deste denominador,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\omega}\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2} &= \frac{1}{2}\,\frac{2(X_C - X_L)}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2}}\left(\frac{dX_C}{d\omega} - \frac{dX_L}{d\omega}\right) \\
&= \frac{X_C - X_L}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2}}\left(-\frac{1}{C_0\omega^2} - L_0\right) \\
&= -\frac{1}{\omega}\,\frac{X_C - X_L}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2}}\,(X_C + X_L) \\
&= -\frac{1}{\omega}\,\frac{X_C^2 - X_L^2}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2}}.
\end{aligned}
$$

Esta quantidade se anula apenas em dois casos, $\omega \to \infty$, que já vimos ser um limite de mínimo, e $X_C = X_L$, que caracteriza a condição de ressonância,

$$
\begin{aligned}
X_C &= X_L \quad \Rightarrow \\
\frac{1}{C_0\omega} &= L_0\omega \quad \Rightarrow \\
\omega^2 &= \frac{1}{L_0 C_0},
\end{aligned}
$$

de forma que temos a nossa resposta,

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.}$$

Note-se que neste caso temos para a amplitude no resistor

$$A_R = \varepsilon_0,$$

que é de fato o valor máximo.

(d) É preciso lembrar que para calcular quantidades bilineares devemos antes tomar as partes reais. A voltagem do gerador é dada no enunciado,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t),$$

e a solução real para a corrente é dada por

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2}}\,\cos(\omega t + \phi_0),$$

onde

$$\mathrm{e}^{\imath\phi_0} = \frac{R_0 + \imath(X_C - X_L)}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R_0^2}}.$$

Como estamos calculando no caso $X_C = X_L$, a solução para $T(t)$ se reduz a

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{R_0} \cos(\omega t + \phi_0),$$

onde

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{\imath}\phi_0} = 1,$$

o que implica que a fase ϕ_0 é nula. Temos portanto par ao produto da corrente e da tensão no gerador

$$P(t) = \frac{\varepsilon_0^2}{R_0} \cos^2(\omega t).$$

A média temporal do quadrado do cosseno é $1/2$, de forma que temos a nossa resposta

$$\boxed{\bar{P} = \frac{\varepsilon_0^2}{2R_0}.}$$

6. Antes de mais nada observamos que, por simetria, temos que $\vec{B} = B_\theta(\rho)\hat{\theta}$.

   (a) Como $\vec{\jmath}$ é dado, para calcular o campo $\vec{E}$ vamos simplesmente usar a lei de Ohm em sua forma local,

   $$\begin{aligned} \vec{\jmath} &= \sigma_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \\ \vec{E} &= \frac{1}{\sigma_0} \vec{\jmath} \\ &= \frac{\jmath_0}{\sigma_0} \hat{z}, \end{aligned}$$

   desde que estejamos dentro do cilindro. Temos portanto a nossa resposta,

   $$\boxed{\vec{E} = \frac{\jmath_0}{\sigma_0} \hat{z},}$$

   para $\rho \leq r_0$.

   (b) Para calcular $\vec{B}$ calculamos a sua circulação em círculos de raio ρ perpendiculares ao eixo z, com centro sobre o eixo z. Calculamos também a corrente dentro deste círculo, ou seja o fluxo de $\vec{\jmath}$ sobre o interior dos círculos. Como temos que $\vec{B} = B_\theta(\rho)\hat{\theta}$ e que $\vec{\jmath} = \jmath_0 \hat{z}$, segue que

   $$\begin{aligned} 2\pi\rho B_\theta(\rho) &= \mu_0 \pi \rho^2 \jmath_0 \quad \Rightarrow \\ B_\theta(\rho) &= \frac{\mu_0 \jmath_0}{2} \rho, \end{aligned}$$

   desde que estejamos dentro do cilindro. Temos portanto a nossa resposta,

   $$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \jmath_0}{2} \rho \hat{\theta},}$$

   para $\rho \leq r_0$.

(c) Simplesmente calculamos $\vec{S}$ usando a definição,

$$
\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\times\vec{B} \\
&= \frac{1}{\mu_0}\,\frac{\jmath_0}{\sigma_0}\,\frac{\mu_0\jmath_0}{2}\,\rho\hat{z}\times\hat{\theta} \\
&= -\frac{\jmath_0^2}{2\sigma_0}\,\rho\,\hat{\rho}.
\end{aligned}
$$

Temos portanto nossa resposta,

$$
\boxed{\vec{S} = -\frac{\jmath_0^2}{2\sigma_0}\,\rho\,\hat{\rho},}
$$

para $\rho \leq r_0$. Observe-se que $\vec{S}$ aponta na direção radial, para dentro do cilindro.

(d) Calculando o fluxo solicitado, fazemos $\rho = r_0$. O vetor $\vec{S}$ é constante ao longo da superfície, de forma que temos para o fluxo Φ_S,

$$
\begin{aligned}
\Phi_S &= -2\pi r_0\ell_0\,\frac{\jmath_0^2}{2\sigma_0}\,r_0 \\
&= -\frac{\pi r_0^2\jmath_0^2\ell_0}{\sigma_0}.
\end{aligned}
$$

Temos portanto nossa resposta,

$$
\boxed{\Phi_S = -\frac{\pi r_0^2\jmath_0^2\ell_0}{\sigma_0}.}
$$

Observe-se que, como temos que a corrente total é $I = \jmath_0\pi r_0^2$ e que a voltagem no trecho de comprimento ℓ_0 é $V = \jmath_0\ell_0/\sigma_0$, podemos escrever isto como $\Phi_S = -IV$, ou seja, o fluxo de $\vec{S}$ na superfície é igual à potência dissipada por efeito Joule no trecho de comprimento ℓ_0.