Física III - (noturno) - FGE211

Exame 2: 25/11/15

GABARITO

1. Por simetria, tanto $\vec{E}$ quanto $\vec{B}$ só podem depender de ρ, e além disso $\vec{E}$ tem de estar na direção de $\hat{\rho}$, enquanto $\vec{B}$ tem de estar na direção de $\hat{\theta}$.

   (a) Para calcular a corrente, calculamos primeiro a carga elétrica δq que atravessa o plano $z = 0$ em um dado intervalo de tempo δt. Assumindo que durante o tempo δt o cilindro tenha se movido por um intervalo δz, temos para a carga dentro do intervalo do cilindro entre $z = 0$ e $z = \delta z$

   $$\delta q = 2\pi r_0 \sigma_0 \delta z.$$

   Dividindo os dois lados desta equação por δt e tomando o limite $\delta t \to 0$ temos

   $$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} \\ &= 2\pi r_0 \sigma_0 \frac{dz}{dt} \\ &= 2\pi r_0 \sigma_0 v_0. \end{aligned}$$

   Temos portanto nossa resposta,

   $$\boxed{I = 2\pi r_0 \sigma_0 v_0.}$$

   (b) Calculando o fluxo de $\vec{E}$ sobre um cilindro de altura h e raio ρ cujo eixo é o eixo z, temos

   $$\begin{aligned} \vec{E} &= E_\rho(\rho)\hat{\rho} \quad \Rightarrow \\ 2\pi\rho h E_\rho(\rho) &= \frac{\sigma_0 2\pi r_0 h}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \\ E_\rho(\rho) &= \frac{\sigma_0 r_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

   deste que $\rho > r_0$. Para $\rho < r_0$ não há carga dentro do cilindro e portanto temos que $\vec{E} = \vec{0}$. Para $\rho = r_0$ fazemos a média dos limites laterais, de forma que temos nossa resposta,

   $$\boxed{\vec{E}(\rho) = \vec{0}, \text{ para } 0 \leq \rho < r_0,}$$

   $$\boxed{\vec{E}(\rho) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{\rho}, \text{ para } \rho = r_0,}$$

   $$\boxed{\vec{E}(\rho) = \frac{\sigma_0 r_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}, \text{ para } r_0 \leq \rho.}$$

(c) Calculando a circulação de $\vec{B}$ em um círculo de raio ρ perpendicular ao eixo z, com centro sobre o eixo z, temos

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= B_\theta(\rho)\hat{\theta} \quad \Rightarrow \\
2\pi\rho B_\theta(\rho) &= \mu_0 I \\
&= \mu_0 2\pi r_0 \sigma_0 v_0 \quad \Rightarrow \\
B_\theta(\rho) &= \mu_0 r_0 \sigma_0 v_0 \, \frac{1}{\rho},
\end{aligned}$$

deste que $\rho > r_0$. Para $\rho < r_0$ não há corrente dentro do círculo e portanto temos que $\vec{B} = \vec{0}$. Para $\rho = r_0$ fazemos a média dos limites laterais, de forma que temos nossa resposta,

$$\boxed{\vec{B}(\rho) = \vec{0}, \text{ para } 0 \leq \rho < r_0,}$$

$$\boxed{\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 \sigma_0 v_0}{2}\,\hat{\theta}, \text{ para } \rho = r_0,}$$

$$\boxed{\vec{B}(\rho) = \mu_0 r_0 \sigma_0 v_0 \, \frac{1}{\rho}\,\hat{\theta}, \text{ para } r_0 < \rho.}$$

(d) Simplesmente calculamos o vetor $\vec{S}$ usando a definição,

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E} \times \vec{B} \\
&= \frac{\sigma_0^2 r_0^2 v_0}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{\rho^2}\,\hat{\rho} \times \hat{\theta} \\
&= \frac{\sigma_0^2 r_0^2 v_0}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{\rho^2}\,\hat{z},
\end{aligned}$$

deste que $\rho > r_0$. Para $\rho < r_0$ não há campos dentro do cilindro e portanto temos que $\vec{S} = \vec{0}$. Para $\rho = r_0$ fazemos o mesmo cálculo com as duas médias dos limites laterais, de forma que temos nossa resposta,

$$\boxed{\vec{S}(\rho) = \vec{0}, \text{ para } 0 \leq \rho < r_0,}$$

$$\boxed{\vec{S}(\rho) = \frac{\sigma_0^2 v_0}{4\varepsilon_0}\,\hat{z}, \text{ para } \rho = r_0,}$$

$$\boxed{\vec{S}(\rho) = \frac{\sigma_0^2 r_0^2 v_0}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{\rho^2}\,\hat{z}, \text{ para } r_0 < \rho.}$$

Note-se que, como $\vec{S}$ está na direção de $\hat{z}$, o fluxo de energia eletromagnética se dá apenas nesta direção. Além disso vemos que $\vec{S} = \vec{0}$ dentro do cilindro, onde não há energia eletromagnética armazenada. O vetor $\vec{S}$ está relacionado com o de fluxo da densidade de energia armazenada nos campos no exterior do cilindro, na direção da velocidade $\vec{v} = v_0\hat{z}$ do cilindro. Observe-se como $\vec{S}$ é proporcional a esta velocidade. Usando as formas das densidades de energia elétrica $\mathcal{E}_E$ e magnética $\mathcal{E}_B$ não é difícil mostrar que $v_0^2\mathcal{E}_E = c^2\mathcal{E}_B$ e que $\vec{S}$ pode ser escrito em termos destas densidades como

$$\vec{S} = \left(\mathcal{E}_E + \frac{c^2}{v_0^2}\,\mathcal{E}_B\right)\vec{v}.$$

2. Vamos discutir primeiro a situação inicial. Como os dois capacitores têm a mesma carga mas têm valores diferentes da capacitância, terão voltagens iniciais diferentes. Temos para estas voltagens iniciais

$$\begin{aligned} V_{1,0} &= \frac{Q_0}{C_1}, \\ V_{2,0} &= \frac{Q_0}{C_2}. \end{aligned}$$

Como $C_2 > C_1$ temos que $V_{2,0} < V_{1,0}$ e portanto a voltagem no resistor é tal que a corrente nele irá fluir de C_1 para C_2. Temos para a voltagem inicial no resistor,

$$V_{R,0} = Q_0 \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} \right),$$

e portanto para a corrente inicial no resistor, e consequentemente em todo o circuito,

$$I_0 = \frac{Q_0}{R} \frac{C_2 - C_1}{C_1 C_2}.$$

(a) Usando a lei das malhas, sendo o sentido positivo do circuito a direção na qual flui a corrente, obtemos a equação

$$\frac{Q_1(t)}{C_1} = RI(t) + \frac{Q_2(t)}{C_2},$$

onde, devido à conservação da carga, as cargas nos capacitores e a corrente estão relacionadas por

$$\begin{aligned} \frac{dQ_2(t)}{dt} &= I(t), \\ \frac{dQ_1(t)}{dt} &= -I(t). \end{aligned}$$

Diferenciando nossa equação uma vez em relação a t, e usando estas relações, obtemos uma equação diferencial para $I(t)$,

$$\begin{aligned} RI(t) + \frac{Q_2(t)}{C_2} - \frac{Q_1(t)}{C_1} &= 0 \quad \Rightarrow \\ R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C_2}\frac{dQ_2(t)}{dt} - \frac{1}{C_1}\frac{dQ_1(t)}{dt} &= 0 \quad \Rightarrow \\ R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C_2} I(t) + \frac{1}{C_1} I(t) &= 0 \quad \Rightarrow \\ R\frac{dI(t)}{dt} + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \right) I(t) &= 0. \end{aligned}$$

Esta é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, cuja solução é uma exponencial real, de forma que escrevemos

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \, e^{-\alpha t}, \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -I_0 \alpha \, e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Substituindo isto na equação diferencial obtemos

$$
\begin{aligned}
-RI_0\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2}\,I_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t} &= 0 \quad \Rightarrow \\
-R\alpha + \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2} &= 0 \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\alpha = \frac{C_2 + C_1}{RC_1 C_2}.
$$

Temos assim a constante α determinada. Como a constante I_0 é claramente a corrente inicial, que calculamos anteriormente, temos a nossa resposta,

$$
\boxed{I(t) = Q_0\,\frac{C_2 - C_1}{RC_1 C_2}\,\mathrm{e}^{-\frac{C_2 + C_1}{RC_1 C_2}\,t}.}
$$

Observe-se que isto é identicamente zero para $C_2 = C_1$, como era de se esperar. Além disso, a corrente vai a zero exponencialmente rápido quando $t \to \infty$, como também era de se esperar.

(b) e

(c) Como temos que $I(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, neste limite o sistema passa a ser estático, e nada mais muda com o tempo. Neste caso a corrente é zero e portanto a voltagem no resistor é zero. Segue que as duas voltagens nos capacitores são iguais. Além disso, temos a conservação da carga, de forma que temos as duas equações

$$
\begin{aligned}
\frac{Q_{1,\infty}}{C_1} &= \frac{Q_{2,\infty}}{C_2}, \\
Q_{1,\infty} + Q_{2,\infty} &= 2Q_0,
\end{aligned}
$$

de onde segue que temos um sistema linear de duas equações e duas incógnitas para as cargas finais $Q_{1,\infty}$ e $Q_{2,\infty}$,

$$
\begin{aligned}
Q_{1,\infty} + Q_{2,\infty} &= 2Q_0, \\
C_2 Q_{1,\infty} - C_1 Q_{2,\infty} &= 0.
\end{aligned}
$$

Resolvendo este sistema simples obtemos para as cargas finais as nossas respostas,

$$
\boxed{Q_{1,\infty} = \frac{2Q_0 C_1}{C_2 + C_1},}
$$

$$
\boxed{Q_{2,\infty} = \frac{2Q_0 C_2}{C_2 + C_1}.}
$$

(d) Há pelo menos duas formas de se resolver este item. Vamos usar primeiro a conservação da energia. Temos para as energias inicial e final nos capacitores

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_i &= \frac{Q_0^2}{2C_1} + \frac{Q_0^2}{2C_2} \\
&= \frac{Q_0^2}{2}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \\
&= \frac{Q_0^2}{2}\,\frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2}, \\
\mathcal{E}_f &= \frac{Q_{1,\infty}^2}{2C_1} + \frac{Q_{2,\infty}^2}{2C_2} \\
&= \frac{4Q_0^2 C_1^2}{(C_2 + C_1)^2}\,\frac{1}{2C_1} + \frac{4Q_0^2 C_2^2}{(C_2 + C_1)^2}\,\frac{1}{2C_2} \\
&= \frac{2Q_0^2 C_1}{(C_2 + C_1)^2} + \frac{2Q_0^2 C_2}{(C_2 + C_1)^2} \\
&= \frac{2Q_0^2 (C_1 + C_2)}{(C_2 + C_1)^2} \\
&= \frac{2Q_0^2}{C_2 + C_1}.
\end{aligned}
$$

A energia total dissipada no resistor durante todo o processo é igual à diferença destas duas energias,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{T}} &= \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f \\
&= \frac{Q_0^2}{2}\,\frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2} - \frac{2Q_0^2}{C_2 + C_1} \\
&= \frac{Q_0^2}{2}\left(\frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2} - \frac{4}{C_2 + C_1}\right) \\
&= \frac{Q_0^2}{2}\,\frac{(C_2 + C_1)^2 - 4C_1 C_2}{C_1 C_2 (C_2 + C_1)} \\
&= \frac{Q_0^2}{2}\,\frac{C_2^2 + C_1^2 + 2C_1 C_2 - 4C_1 C_2}{C_1 C_2 (C_2 + C_1)} \\
&= \frac{Q_0^2}{2}\,\frac{C_2^2 + C_1^2 - 2C_1 C_2}{C_1 C_2 (C_2 + C_1)}.
\end{aligned}
$$

Temos portanto nossa resposta,

$$
\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{T}} = \frac{Q_0^2}{2}\,\frac{(C_2 - C_1)^2}{C_1 C_2 (C_2 + C_1)}.}
$$

Outra forma de obter este mesmo resultado é integrando no tempo, de zero até o infinito, a potência dissipada no resistor, que é dada por $RI^2(t)$. Fazendo isto temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{T}} &= \int_0^\infty dt\, RI^2(t) \\
&= R\int_0^\infty dt\, Q_0^2\,\frac{(C_2 - C_1)^2}{R^2 C_1^2 C_2^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{2(C_2 + C_1)}{RC_1 C_2}\,t} \\
&= Q_0^2\,\frac{(C_2 - C_1)^2}{RC_1^2 C_2^2}\int_0^\infty dt\,\mathrm{e}^{-\frac{2(C_2 + C_1)}{RC_1 C_2}\,t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= Q_0^2 \frac{(C_2-C_1)^2}{RC_1^2C_2^2} \frac{-RC_1C_2}{2(C_2+C_1)} \, \mathrm{e}^{-\frac{2(C_2+C_1)}{RC_1C_2}t} \Big[_0^\infty \\
&= \frac{Q_0^2}{2} \frac{(C_2-C_1)^2}{C_1C_2(C_2+C_1)}.
\end{aligned}
$$

Temos portanto mais uma vez o mesmo resultado,

$$
\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{T}} = \frac{Q_0^2}{2} \frac{(C_2-C_1)^2}{C_1C_2(C_2+C_1)}.}
$$

3. (a) Vamos calcular o fluxo $\Phi_{B,\mathrm{in}}$ do campo $\vec{B}$ durante a entrada da espira na região onde existe o campo. Como temos que $\vec{B} = B_0\hat{z}$ com B_0 constante, o fluxo é o produto de B_0 pela área da espira que está dentro da região. Adotando como $t = 0$ o momento da entrada da espira na região, e colocando o versor normal da área da espira na direção $\hat{z}$, temos portanto

$$
\Phi_{B,\mathrm{in}}(t) = B_0a_0v_0t.
$$

Segue que a força eletromotriz correspondente é dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{in}} &= -\frac{d}{dt}\Phi_{B,\mathrm{in}}(t) \\
&= -B_0a_0v_0.
\end{aligned}
$$

Como o resultado é negativo, a força eletromotriz está na direção negativa do circuito. O mesmo é então verdadeiro para a corrente, e temos portanto nossa resposta

$$
\boxed{I_{\mathrm{in}} = -\frac{B_0a_0v_0}{R_0}.}
$$

A direção de orientação da corrente é $-\hat{z}$. Ao final do processo de entrada da espira o fluxo é dado pela condição $v_0t = b_0$, e temos portanto para este valor final $\Phi_{B,0}$

$$
\Phi_{B,0} = B_0a_0b_0.
$$

(b) Vamos agora calcular o fluxo $\Phi_{B,\mathrm{out}}$ do campo $\vec{B}$ durante a saída da espira da região onde existe o campo. Como temos que $\vec{B} = B_0\hat{z}$ com B_0 constante, o fluxo é o produto de B_0 pela área da espira que está dentro da região. Adotando como $t = 0$ o momento da saída da espira na região, no qual temos o fluxo $\Phi_{B,0}$, e colocando o versor normal da área da espira na direção $\hat{z}$, temos portanto

$$
\Phi_{B,\mathrm{out}}(t) = \Phi_{B,0} - B_0a_0v_0t.
$$

Segue que a força eletromotriz correspondente é dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathrm{out}} &= -\frac{d}{dt}\Phi_{B,\mathrm{out}}(t) \\
&= B_0a_0v_0.
\end{aligned}
$$

Como o resultado é positivo, a força eletromotriz está na direção positiva do circuito. O mesmo é então verdadeiro para a corrente, e temos portanto nossa resposta

$$\boxed{I_{\text{out}} = \frac{B_0 a_0 v_0}{R_0}.}$$

A direção de orientação da corrente é $\hat{z}$. Ao final do processo de saída da espira o fluxo volta a ser nulo.

(c) O elemento de força magnética sobre um elemento de circuito descrito por $\vec{d\ell}$, que carrega uma corrente I, é dado por

$$d\vec{F} = I\vec{d\ell} \times \vec{B}$$

O trecho relevante do circuito é o segmento de comprimento a_0 que está à frente, orientado ao longo da direção $-\hat{x}$, e portanto com a corrente I correndo ao longo de $-\hat{x}$. Como $\vec{B}$ é um campo constante, temos

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{in}} &= -I_{\text{in}} a_0 B_0 \hat{x} \times \hat{z} \\ &= \frac{B_0 a_0 v_0}{R_0}\, a_0 B_0(-\hat{y}) \\ &= -\frac{B_0^2 a_0^2 v_0}{R_0}\,\hat{y}. \end{aligned}$$

Temos portanto nossa resposta

$$\boxed{\vec{F}_{\text{in}} = -\frac{B_0^2 a_0^2 v_0}{R_0}\,\hat{y}.}$$

Note-se que, como a velocidade está na direção $\hat{y}$, esta força está na direção contrária à da velocidade.

(d) O elemento de força magnética sobre um elemento de circuito descrito por $\vec{d\ell}$, que carrega uma corrente I, é dado por

$$d\vec{F} = I\vec{d\ell} \times \vec{B}$$

O trecho relevante do circuito é o segmento de comprimento a_0 que está atrás, orientado ao longo da direção $\hat{x}$, e portanto com a corrente I correndo ao longo de $\hat{x}$. Como $\vec{B}$ é um campo constante, temos

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{out}} &= I_{\text{out}} a_0 B_0 \hat{x} \times \hat{z} \\ &= \frac{B_0 a_0 v_0}{R_0}\, a_0 B_0(-\hat{y}) \\ &= -\frac{B_0^2 a_0^2 v_0}{R_0}\,\hat{y}. \end{aligned}$$

Temos portanto nossa resposta

$$\boxed{\vec{F}_{\text{out}} = -\frac{B_0^2 a_0^2 v_0}{R_0}\,\hat{y}.}$$

Note-se que, mais uma vez, como a velocidade está na direção $\hat{y}$, esta força está na direção contrária à da velocidade.

4. Antes de mais nada observamos que, por simetria, temos que $\vec{B} = B_\theta(\rho)\hat{\theta}$.

   (a) Como $\vec{\jmath}$ é dado, para calcular o campo $\vec{E}$ vamos simplesmente usar a lei de Ohm em sua forma local,

$$\begin{aligned} \vec{\jmath} &= \sigma_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \\ \vec{E} &= \frac{1}{\sigma_0}\,\vec{\jmath} \\ &= \frac{\jmath_0}{\sigma_0}\,\hat{z}, \end{aligned}$$

   desde que estejamos dentro do cilindro. Temos portanto a nossa resposta,

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\jmath_0}{\sigma_0}\,\hat{z},}$$

   para $\rho \leq r_0$.

   (b) Para calcular $\vec{B}$ calculamos a sua circulação em círculos de raio ρ perpendiculares ao eixo z, com centro sobre o eixo z. Calculamos também a corrente dentro deste círculo, ou seja o fluxo de $\vec{\jmath}$ sobre o interior dos círculos. Como temos que $\vec{B} = B_\theta(\rho)\hat{\theta}$ e que $\vec{\jmath} = \jmath_0\hat{z}$, segue que

$$\begin{aligned} 2\pi\rho B_\theta(\rho) &= \mu_0\pi\rho^2\jmath_0 \quad \Rightarrow \\ B_\theta(\rho) &= \frac{\mu_0\jmath_0}{2}\,\rho, \end{aligned}$$

   desde que estejamos dentro do cilindro. Temos portanto a nossa resposta,

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\jmath_0}{2}\,\rho\hat{\theta},}$$

   para $\rho \leq r_0$.

   (c) Simplesmente calculamos $\vec{S}$ usando a definição,

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\times\vec{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0}\,\frac{\jmath_0}{\sigma_0}\,\frac{\mu_0\jmath_0}{2}\,\rho\hat{z}\times\hat{\theta} \\ &= -\frac{\jmath_0^2}{2\sigma_0}\,\rho\,\hat{\rho}. \end{aligned}$$

   Temos portanto nossa resposta,

$$\boxed{\vec{S} = -\frac{\jmath_0^2}{2\sigma_0}\,\rho\,\hat{\rho},}$$

   para $\rho \leq r_0$. Observe-se que $\vec{S}$ aponta na direção radial, para dentro do cilindro.

(d) Calculando o fluxo solicitado, fazemos $\rho = r_0$. O vetor $\vec{S}$ é constante ao longo da superfície, de forma que temos para o fluxo Φ_S,

$$\begin{aligned} \Phi_S &= -2\pi r_0 \ell_0 \, \frac{\jmath_0^2}{2\sigma_0} \, r_0 \\ &= -\frac{\pi r_0^2 \jmath_0^2 \ell_0}{\sigma_0}. \end{aligned}$$

Temos portanto nossa resposta,

$$\boxed{\Phi_S = -\frac{\pi r_0^2 \jmath_0^2 \ell_0}{\sigma_0}.}$$

Observe-se que, como temos que a corrente total é $I = \jmath_0 \pi r_0^2$ e que a voltagem no trecho de comprimento ℓ_0 é $V = \jmath_0 \ell_0 / \sigma_0$, podemos escrever isto como $\Phi_S = -IV$, ou seja, o fluxo de $\vec{S}$ na superfície é igual à potência dissipada por efeito Joule no trecho de comprimento ℓ_0.