Física III - (noturno) - FGE211

Exame 1: 16/10/15

GABARITO

1. Por simetria tanto o potencial ϕ quanto o campo $\vec{E}$ só podem depender de ρ, e $\vec{E}$ tem de estar na direção de $\hat{\rho}$.

   (a) Calculando o potencial por integração, através da lei de Coulomb, temos para o elemento de carga

   $$dq = \alpha|z|dz,$$

   de forma que o potencial é dado por

   $$\begin{aligned} \phi(\rho) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L} dz\,\frac{\alpha|z|}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ &= \frac{2\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{L} dz\,\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}, \end{aligned}$$

   uma vez que o integrando é par em z. A integral pode agora ser feita facilmente, pois temos no denominador a derivada do argumento da raiz quadrada, de forma que temos

   $$\begin{aligned} \phi(\rho) &= \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\sqrt{\rho^2+z^2}\,\Big[_{0}^{L} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho\right), \end{aligned}$$

   uma vez que ρ é positivo. Observe que esta expressão vai a zero quando $\rho \to \infty$. Temos portanto nossa resposta,

   $$\boxed{\phi(\rho) = \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho\right).}$$

   (b) Podemos calcular $\vec{E}(\rho)$ de duas formas. Em primeiro lugar, podemos tomar o gradiente de $\phi(\rho)$, e temos

   $$\begin{aligned} \vec{E}(\rho) &= -\vec{\nabla}\phi(\rho) \\ &= -\left[\partial_\rho\phi(\rho)\right]\,\hat{\rho} \\ &= -\frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}}-1\right)\hat{\rho} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}}\,\hat{\rho}. \end{aligned}$$

   Observe que mais uma vez esta expressão vai a zero quando $\rho \to \infty$. Temos portanto nossa resposta,

$$\boxed{\vec{E}(\rho) = \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}}\,\hat{\rho}.}$$

Esta resposta também pode ser obtida por integração direta. Neste caso, considerando o elemento de carga que calculamos no item anterior, e levando em conta o fator de projeção das contribuições para $E_\rho(\rho)$ sobre o plano, temos

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\rho) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L} dz\,\frac{\alpha|z|}{\rho^2+z^2}\,\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\,\hat{\rho} \\
&= \frac{2\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{L} dz\,\frac{z}{\rho^2+z^2}\,\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\,\hat{\rho} \\
&= \frac{\alpha\rho}{2\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{L} dz\,\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}^{\,3}}\,\hat{\rho},
\end{aligned}$$

onde trabalhamos a integral de forma semelhante ao que foi feito antes para o potencial. A integral pode agora ser feita de forma simples, e obtemos

$$\begin{aligned}
E_\rho(\rho) &= \frac{\alpha\rho}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{(-1)}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\,\Big[_0^L \\
&= \frac{\alpha\rho}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+L^2}}\right) \\
&= \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}},
\end{aligned}$$

uma vez que ρ é positivo. Temos portanto a mesma resposta de antes para o campo elétrico,

$$\boxed{\vec{E}(\rho) = \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho}{\sqrt{\rho^2+L^2}}\,\hat{\rho}.}$$

Epílogo matemático: se considerarmos a nossa solução para o potencial,

$$\phi(\rho) = \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{\rho^2+L^2}-\rho\right),$$

não apenas é possível verificar que ela vai a zero da forma correta quando $\rho \to \infty$, reduzindo-se à lei de Coulomb no infinito, mas ela tem um limite finito e não-nulo para $\rho \to 0$,

$$\lim_{\rho\to 0}\phi(\rho) = \frac{\alpha L}{2\pi\varepsilon_0},$$

o que é um tanto inesperado, uma vez que $\lambda(0) = 0$. Esta impressão errônea é causada pelo fato de que estamos tratando como se fosse bidimensional um problema que de fato é tridimensional. Se escrevermos a equação de Laplace em coordenadas polares, levando em conta que ϕ depende apenas de ρ, e considerando apenas o caso $\rho > 0$, para o qual não há fontes presentes,

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(\rho) &= \frac{1}{\rho}\,\partial_\rho\left[\rho\,\partial_\rho\phi(\rho)\right]\\ &= 0,\end{aligned}$$

não é difícil verificar que não há nenhuma solução desta equação que satisfaça às condições de contorno descritas acima. Por outro lado, se considerarmos o problema tridimensional completo, em coordenadas cilíndricas, ainda é possível afirmar que nada depende de θ por motivos de simetria, mas não é possível afirmar que as derivadas de ϕ em relação a z se anulem em $z = 0$. Devido ao uso do módulo de z em $\lambda(z)$, haverá algum tipo de singularidade no plano dado por $z = 0$, apesar de que não há divergências naquele plano. Escrevendo a equação de Laplace completa em três dimensões, temos

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(\rho,z) &= \frac{1}{\rho}\,\partial_\rho\left[\rho\,\partial_\rho\phi(\rho,z)\right] + \partial_z^2\phi(\rho,z)\\ &= 0,\end{aligned}$$

Observe-se que por motivos de simetria temos que

$$\phi(\rho,-z) = \phi(\rho,z),$$

o que leva ao fato de que $\phi(\rho,0)$ pode ser finito e não-nulo como observamos, mas que também implica que

$$\partial_z\phi(\rho,-z) = -\,\partial_z\phi(\rho,z),$$

o que implica que $\partial_z\phi(\rho,0) = 0$. Já para a segunda derivada que aparece na equação de Laplace, não se pode dizer o mesmo. De fato, substituindo nossa solução na equação podemos concluir que

$$\lim_{z\to 0}\partial_z^2\phi(\rho,z) = \frac{\alpha}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho^2 + 2L^2}{\sqrt{\rho^2 + L^2}^3}\right).$$

Em outras palavras, tudo se passa como se no problema estritamente bidimensional no plano das coordenadas (ρ,θ), houvesse uma distribuição superficial de carga $\sigma(\rho)$ dada por esta expressão, que é um remanescente da estrutura tridimensional do problema,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\,\partial_\rho\left[\rho\,\partial_\rho\phi(\rho)\right] &= -\,\frac{\sigma(\rho)}{\varepsilon_0}\\ &= -\,\frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho^2 + 2L^2}{\sqrt{\rho^2 + L^2}^3}\right),\\ \sigma(\rho) &= \frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\rho^2 + 2L^2}{\sqrt{\rho^2 + L^2}^3}\right),\end{aligned}$$

que é singular em $\rho = 0$. Vemos assim que a eletrostática tridimensional restrita a um plano *não* é a mesma coisa que a eletrostática bidimensional naquele plano.

2. Por simetria tanto o potencial ϕ quanto o campo $\vec{E}$ só podem depender de r, e $\vec{E}$ tem de estar da direção de $\hat{r}$. Neste caso é mais fácil calcular primeiro o campo elétrico, usando a lei de Gauss e coordenadas esféricas, assim a ordem dos dois itens deve ser invertida.

   (a) Se usarmos o padrão de que o potencial é zero no infinito, e como o campo é zero fora da esfera, segue que temos $\phi(R) = 0$. Podemos agora calcular o potencial fazendo uma integral de linha do campo $\vec{E}$ ao longo de um raio. Para isto temos que

$$\phi(r) - \phi(R) = -\int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

   Como $\phi(R) = 0$, e usando o valor de $\vec{E}$ obtido no segundo item, além do fato de que $d\vec{\ell} = dr\,\hat{r}$, temos

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= -\int_R^r dr'\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r'^2} - \frac{r'}{R^3}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r'} + \frac{r'^2}{2R^3}\right)\Bigg[_R^r \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} + \frac{r^2}{2R^3} - \frac{1}{2R}\right).
\end{aligned}$$

   Temos portanto nossa resposta para o potencial dentro da esfera,

$$\boxed{\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R}\right),\ \text{para } 0 < r \leq R.}$$

   Além disto, como discutido anteriormente, fora da esfera o potencial é zero,

$$\boxed{\phi(r) = 0,\ \text{para } R \leq r.}$$

   (b) Vamos usar a lei de Gauss em uma esfera centrada na origem. Antes de mais nada é preciso calcular a densidade volumétrica de carga ρ,

$$\rho = -\frac{3q}{4\pi R^3}.$$

   Isto posto, para o caso $0 < r \leq R$ temos para o fluxo de $\vec{E}$, usando a lei de Gauss,

$$\begin{aligned}
4\pi r^2 E_r(r) &= \frac{q}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R dr\,r^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\phi\,\frac{3q}{4\pi R^3} \\
&= \frac{q}{\varepsilon_0} - \frac{3q}{4\pi R^3\varepsilon_0}\,4\pi\int_0^R dr\,r^2 \\
&= \frac{q}{\varepsilon_0} - \frac{3qr^3}{3R^3\varepsilon_0} \\
&= \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right).
\end{aligned}$$

   Temos portanto para $E_r(r)$,

$$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right).$$

Temos portanto nossa resposta para $\vec{E}$,

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)\hat{r}, \text{ para } 0 < r \leq R.}$$

É claro que para $r \geq R$ a carga interna total é zero, e portanto temos simplesmente que

$$\boxed{\vec{E}(r) = \vec{0}, \text{ para } R \leq r.}$$

3. Por simetria, tanto $\vec{E}$ quanto $\vec{B}$ só podem depender de ρ, e além disso $\vec{E}$ tem de estar na direção de $\hat{\rho}$, enquanto $\vec{B}$ tem de estar na direção de $\hat{\theta}$.

   (a) Começamos usando a lei de Gauss em um trecho de altura h da superfície cilíndrica para obter a densidade superficial de carga σ. Calculando o fluxo de $\vec{E}$ e usando a lei de Gauss temos

$$\begin{aligned} 2\pi RhE &= \frac{1}{\varepsilon_0}2\pi Rh\sigma \quad \Rightarrow \\ \sigma &= \varepsilon_0 E. \end{aligned}$$

   Para calcular a corrente, calculamos primeiro a carga elétrica que atravessa o plano $z = 0$ em um dado intervalo de tempo δt. Assumindo que durante o tempo δt o cilindro tenha se movido por um intervalo δz, temos para a carga dentro do intervalo do cilindro entre $z = 0$ e $z = \delta z$

$$\delta q = 2\pi R\sigma\delta z.$$

   Dividindo os dois lados desta equação por δt e tomando o limite $\delta t \to 0$ temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} \\ &= 2\pi R\sigma\frac{dz}{dt} \\ &= 2\pi R\sigma v. \end{aligned}$$

   Substituindo o valor de σ temos nossa resposta,

$$\boxed{I = 2\pi\varepsilon_0 RvE.}$$

   (b) Calculando a circulação de $\vec{B}$ em um círculo de raio $\rho > R$ contido no plano $z = 0$ temos

$$\begin{aligned} 2\pi\rho B_\theta(\rho) &= \mu_0 I \\ &= \mu_0 2\pi\varepsilon_0 RvE \\ &= \frac{2\pi RvE}{c^2} \quad \Rightarrow \\ B_\theta(\rho) &= \frac{RvE}{c^2\rho}, \end{aligned}$$

onde $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$. Temos portanto nossa resposta,

$$\boxed{\vec{B}(\rho) = \frac{RvE}{c^2}\,\frac{1}{\rho}\,\hat{\theta}, \text{ para } R < \rho.}$$

É claro que para $0 \leq \rho < R$ a corrente interna ao circuito é zero, e portanto temos que

$$\boxed{\vec{B}(\rho) = \vec{0}, \text{ para } 0 \leq \rho < R.}$$

Finalmente, para $\rho = R$ devemos ter a média dos limites laterais como resposta,

$$\boxed{\vec{B}(R) = \frac{vE}{2c^2}\,\hat{\theta}.}$$

4. (a) Vamos partir do fato de que o momento magnético de uma espira circular de raio ρ que carrega uma corrente I no sentido positivo é dado por

$$\vec{m} = \pi\rho^2 I\hat{n},$$

onde $\hat{n}$ é a normal à superfície. Considerando a corrente dI que é carregada por um anel de raio ρ e espessura $d\rho$ do nosso disco, temos que ele dá uma contribuição para o momento magnético que é dada por

$$d\vec{m} = \pi\rho^2 dI\hat{z},$$

uma vez que em nosso disco temos que $\hat{n} = \hat{z}$. Por outro lado temos para dI que

$$\begin{aligned} dI &= d\rho\, v\sigma \\ &= d\rho\, \rho\omega\sigma, \end{aligned}$$

onde $\rho\omega = v$. Podemos agora montar a integral para somar todas as contribuições para o momento magnético,

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \int_0^R d\vec{m} \\ &= \int_0^R dI\,\pi\rho^2\hat{z} \\ &= \omega\sigma\pi\int_0^R d\rho\,\rho^3\hat{z} \\ &= \omega\sigma\pi\,\frac{\rho^4}{4}\Bigg[_0^R\,\hat{z} \\ &= \omega\sigma\pi\,\frac{R^4}{4}\,\hat{z}. \end{aligned}$$

Temos portanto a nossa resposta,

$$\boxed{\vec{m} = \frac{\pi\omega\sigma R^4}{4}\,\hat{z}.}$$

(b) Vamos usar a lei de Biot-Savart diretamente para o campo magnético para fazer o cálculo. Podemos escrever para fins deste cálculo

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3},$$

onde $\vec{r} = z\hat{z} - \rho\hat{\rho}$, $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ e $d\vec{\ell} = \rho d\theta\,\hat{\theta}$. Considerando mais uma vez um anel carregando uma corrente dI, temos

$$\begin{aligned} dI\,d\vec{\ell} &= \sigma\rho\omega\,d\rho\,\rho\,d\theta\,\hat{\theta} \\ &= \sigma\rho^2\omega\,d\rho\,d\theta\,\hat{\theta}. \end{aligned}$$

Temos portanto para uma contribuição para o campo magnético, associada a uma área $\rho\,d\rho\,d\theta$ do disco,

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dI\,d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sigma\rho^2\omega\,d\rho\,d\theta\,\hat{\theta} \times \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

O produto vetorial é facilmente calculado,

$$\begin{aligned} \hat{\theta} \times \vec{r} &= \hat{\theta} \times (z\hat{z} - \rho\hat{\rho}) \\ &= (z\hat{\rho} + \rho\hat{z})\,. \end{aligned}$$

Temos portanto para o campo magnético, agora em termos de uma integral dupla,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4\pi}\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{\rho^2\,(z\hat{\rho} + \rho\hat{z})}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3}$$

Não é difícil ver agora que

$$\int_0^{2\pi} d\theta\,\hat{\rho} = \vec{0},$$

de forma que temos

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0\sigma\omega}{4\pi}\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{\rho^3}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3}\,\hat{z} \\ &= \frac{2\pi\mu_0\sigma\omega}{4\pi}\int_0^R d\rho\,\frac{\rho^3}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3}\,\hat{z}. \end{aligned}$$

Podemos fazer a integral restante por partes,

$$\begin{aligned} \int d\rho\,\frac{\rho^3}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} &= \int d\rho\,\rho^2\,\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} \\ &= \rho^2\,\frac{(-1)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - \int d\rho\,2\rho\,\frac{(-1)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} + 2\int d\rho\,\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\
&= -\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} + 2\sqrt{\rho^2+z^2} \\
&= \frac{2\rho^2+2z^2-\rho^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\
&= \frac{\rho^2+2z^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.
\end{aligned}
$$

Usando este resultado temos para o campo $\vec{B}$

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\,\frac{\rho^2+2z^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\Bigg[_0^R\,\hat{z} \\
&= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left(\frac{R^2+2z^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2|z|\right)\hat{z},
\end{aligned}
$$

uma vez que $\sqrt{z^2} = |z|$. Temos portanto a nossa resposta,

$$
\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\,\frac{R^2+2z^2-2|z|\sqrt{R^2+z^2}}{\sqrt{R^2+z^2}}\,\hat{z}.}
$$

Como esperado, temos que $\vec{B}(z) = \vec{B}(-z)$.