Física III - (noturno) - FGE211

Exame de Recuperação: 05/02/16

Nome:____

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- Ao entrar na sala da prova desligue o seu telefone celular, se estiver com um, e mantenha-o desligado até depois de deixar a sala. Desligue e guarde também mp3 players, CD players, DVD players, rádios, laptops, palmtops e quaisquer outros gadgets eletrônicos.
- Antes de começar a ler a prova coloque o seu nome *completo* nesta primeira folha de prova, que deverá ser devolvida com as folhas de resolução. Coloque o seu nome em *todas* as folhas de resolução, e entregue todas juntas e devidamente ordenadas, na ordem das questões, junto com esta primeira folha de prova.
- As questões e itens têm níveis diferentes de dificuldade, mas os itens têm todos o mesmo valor. Use as frentes e os versos de um conjunto de folhas de resolução *diferente* para cada questão. Solicite folhas de resolução adicionais, se for necessário. Não escreva no canto superior esquerdo das folhas, onde elas serão grampeadas.
- **Nunca coloque duas questões diferentes em uma mesma folha de resolução.**
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas com *tinta*, e devem estar claramente marcadas nas folhas de resolução.
- Leia atentamente *todas* as questões antes de começar a prova, procurando entender com precisão o que é solicitado em cada uma.
- Esclareça quaisquer dúvidas que aparecerem sobre a proposição das questões, com o instrutor, logo no *início* da prova.
- Lembre-se de que frequentemente existe uma forma de fazer cada questão que é mais fácil e rápida do que a primeira que vem à mente, portanto não se precipite.
- Há um formulário disponível, que é distribuído junto com as folhas de prova. A menos deste formulário não é permitido fazer consultas de espécie alguma.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou de computadores de qualquer tipo durante a prova.

QUESTÕES

1. Considere um fio de comprimento $2L$ com uma densidade linear de carga dada por $\lambda(z) = \alpha|z|$, onde α é uma constante e o fio está colocado ao longo do eixo z, entre $-L$ e L. Considere o plano que intersecta o fio perpendicularmente em seu ponto médio, um conjunto de coordenadas polares (ρ, θ) sobre ele, e os respectivos versores $\hat{\rho}$ e $\hat{\theta}$. Use o padrão de que o potencial elétrico seja zero no infinito.

   (a) Calcule o potencial elétrico $\phi(\rho, \theta, z)$, para $z = 0$ e $\rho > 0$.

   (b) Calcule o campo elétrico $\vec{E}(\rho, \theta, z)$, para $z = 0$ e $\rho > 0$.

   (c) Calcule a primeira derivada parcial de $\phi(\rho, \theta, z)$ em relação a z, no plano $z = 0$, para $\rho > 0$,
   $$\frac{\partial \phi}{\partial z}(\rho, \theta, 0).$$

   (d) Calcule a segunda derivada parcial de $\phi(\rho, \theta, z)$ em relação a z, no plano $z = 0$, para $\rho > 0$,
   $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(\rho, \theta, 0).$$

2. Considere um dipolo elétrico $\vec{p} = p\hat{z}$ no centro de uma distribuição volumétrica $\rho(r, \theta, \varphi)$ de carga elétrica, dada por
   $$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right),$$
   dentro de uma esfera de raio R centrada na origem, onde ρ_0 é uma constante dada. Considere um conjunto de coordenadas esféricas (r, θ, φ) e os respectivos versores $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$, de tal forma que $\hat{r} = \hat{z}$ para $\theta = 0$. Use o padrão de que o potencial elétrico seja zero no infinito.

   (a) Calcule a carga $Q(r)$ dentro da esfera de raio r, para todo $r > 0$.

   (b) Calcule o potencial elétrico $\phi(r, \theta, \varphi)$, para todo $r > 0$.

   (c) Calcule o campo elétrico $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$, para todo $r > 0$.

   (d) Calcule o campo magnético $\vec{B}(r, \theta, \varphi)$, para todo $r > 0$.

3. Considere uma partícula de carga q_0 e massa m_0 movendo-se com velocidade $\vec{v}$, com módulo pequeno e constante v_0, tal que $\hat{v} \cdot \hat{z} = \sqrt{3}/2$, em uma região onde há um campo magnético homogêneo $B_0\hat{z}$. Despreze quaisquer perdas de energia da partícula durante o seu movimento.

   (a) Identifique e calcule a componente de $\vec{v}$ que permanece constante com o tempo.

   (b) Determine se o módulo da projeção da velocidade da partícula no plano $z = 0$ permanece constante.

   (c) Calcule a velocidade angular de rotação ω da projeção da posição da partícula no plano $z = 0$.

   (d) Calcule o raio R da órbita da projeção da posição da partícula no plano $z = 0$.

4. Uma espira retangular de lados a_0 e b_0, com resistência elétrica R_0, atravessa uma região retangular onde há um campo magnético uniforme $\vec{B}_0 = B_0\hat{z}$ na direção do eixo z. O lado de comprimento a_0 está na direção $\hat{x}$ do eixo x e o de comprimento b_0 na direção $\hat{y}$ do eixo y. As dimensões da espira são menores do que as da região retangular, os lados da espira estão alinhados com os lados correspondentes da região, de forma que a espira chega a ficar completamente contida na região. A espira tem velocidade constante $\vec{v}_0 = v_0\hat{y}$. Escreva os vetores em termos da base de versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$.

   (a) Determine a corrente elétrica I_{in} que existe na espira enquanto ela está *entrando* na região onde existe o campo. Dê também o versor de orientação do circuito de acordo com a sentido da corrente.

   (b) Determine a corrente elétrica I_{out} que existe na espira enquanto ela está *saindo* na região onde existe o campo. Dê também o versor de orientação do circuito de acordo com a sentido da corrente.

   (c) Determine a força magnética $\vec{F}_{\text{in}}$ que atua sobre a espira enquanto ela está *entrando* na região onde existe o campo.

   (d) Determine a força magnética $\vec{F}_{\text{out}}$ que atua sobre a espira enquanto ela está *saindo* da região onde existe o campo.

5. Considere um gerador de corrente alternada que alimenta um circuito RLC em série, que consiste de um resistor com resistência R_0, um indutor com auto-indutância L_0 e um capacitor com capacitância C_0. A voltagem produzida pelo gerador é dada por

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t).$$

   (a) Determine em que limite de ω a amplitude da voltagem no capacitor tende a ser máxima.

   (b) Determine em que limite de ω a amplitude da voltagem no indutor tende a ser máxima.

   (c) Determine o valor de ω tal que a amplitude da corrente no circuito seja máxima.

   (d) Determine a potência média fornecida pelo gerador ao circuito quando a amplitude da corrente é máxima.

6. Um fio condutor, cilíndrico, retilíneo, e muito longo, de raio r_0 e condutividade σ_0, transporta uma corrente elétrica constante, de densidade $\vec{\jmath} = \jmath_0\hat{z}$ uniformemente distribuída ao longo da sua secção transversal. Tome o eixo do cilindro como o eixo z de um sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z), e escreva os vetores em termos da respectiva base de versores $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{z}$.

   (a) Calcule o campo $\vec{E}$ em todo o interior do cilindro.

   (b) Calcule o campo $\vec{B}$ em todo o interior do cilindro.

   (c) Calcule o vetor de Poynting $\vec{S}$ na superfície do cilindro.

   (d) Calcule o fluxo Φ_S de $\vec{S}$ através da superfície de um trecho do fio com comprimento ℓ_0.

Formulário

Observação: este é um formulário de uso geral, que é distribuído junto com as provas; a inclusão de uma fórmula neste formulário não significa que ela necessariamente seja útil para algum dos problemas da prova.

- Forças eletromagnéticas sobre uma carga pontual q com velocidade $\vec{v}$:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

- Elemento de força magnética sobre um elemento de circuito de comprimento $d\ell$ carregando uma corrente I:

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

- Potencial elétrico de Coulomb, de uma carga pontual q em $\vec{r}\,'$:

$$\phi(\vec{r}\,) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

- Potencial elétrico de um dipolo elétrico pontual $\vec{p}$ em $\vec{r}\,'$:

$$\phi(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}.$$

- Campo elétrico de Coulomb, de uma carga pontual q em $\vec{r}\,'$:

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}.$$

- Lei de Biot-Savart para o potencial vetor e para o campo magnético, para um circuito C descrito por $\vec{r}\,'$ e por $d\vec{\ell} = d\vec{r}\,'$ carregando uma corrente I:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}\,) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \\ \vec{B}(\vec{r}\,) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}. \end{aligned}$$

- Forma local da lei de Ohm, para um material com condutividade σ:

$$\vec{\jmath} = \sigma \vec{E}.$$

- Primeira equação da eletrostática, nas formas diferencial e integral:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dv. \end{aligned}$$

- Segunda equação da eletrostática, nas formas diferencial e integral:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}, \\ \oint_C \vec{E} \cdot \vec{d\ell} &= 0.\end{aligned}$$

- Primeira equação da magnetostática, nas formas diferencial e integral:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \oint_S \vec{B} \cdot \vec{da} &= 0.\end{aligned}$$

- Segunda equação da magnetostática, nas formas diferencial e integral:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{\jmath}, \\ \oint_{C=\partial S} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} &= \mu_0 I_{\text{int}} \\ &= \mu_0 \int_S \vec{\jmath} \cdot \vec{da}.\end{aligned}$$

- Relação entre o campo elétrico e o potencial elétrico na eletrostática, nas formas diferencial e integral:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi, \\ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot \vec{d\ell} &= \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2).\end{aligned}$$

- Relação entre o campo magnético e o potencial vetor na magnetostática, na forma diferencial:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

- A equação da continuidade no caso estático, para $\vec{\jmath}(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath} = 0.$$

- Momento magnético de um circuito plano de área S carregando uma corrente I:

$$\vec{m} = I\vec{S}.$$

- Definição do vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}.$$

- A definição geral do operador divergente de um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r})$:

$$\text{div}\vec{W} = \lim_{\delta V \to 0} \frac{1}{\delta V} \oint_{\delta S = \partial(\delta V)} \vec{W} \cdot \vec{da}.$$

- A definição geral do operador rotacional de um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r}\,)$:

$$\text{rot}\vec{W} \;=\; \lim_{\delta S\to 0}\frac{1}{\delta S}\oint_{\delta C=\partial(\delta S)}\vec{W}\cdot d\vec{\ell}.$$

- O teorema de Gauss para um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r}\,)$:

$$\oint_{S=\partial V}\vec{W}\cdot d\vec{a} \;=\; \int_V \text{div}\vec{W}\,dv.$$

- O teorema de Stokes para um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r}\,)$:

$$\oint_{C=\partial S}\vec{W}\cdot d\vec{\ell} \;=\; \int_S \text{rot}\vec{W}\cdot d\vec{a}.$$

- O operador gradiente em coordenadas Cartesianas (x,y,z), cilíndricas (ρ,θ,z) e esféricas (r,θ,φ), de um campo escalar diferenciável $\phi(\vec{r}\,)$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\phi, \frac{\partial}{\partial y}\phi, \frac{\partial}{\partial z}\phi\right),\\
\vec{\nabla}\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\phi, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\phi, \frac{\partial}{\partial z}\phi\right),\\
\vec{\nabla}\phi &= \left(\partial_r\phi, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\phi, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\phi\right).
\end{aligned}$$

- Fórmula geral para o operador divergente de um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r}\,)$ em um sistema qualquer de coordenadas curvilíneas ortogonais, onde J é o determinante Jacobiano que aparece no elemento de volume deste sistema de coordenadas:

$$\text{div}\vec{W} \;=\; \frac{1}{J}\vec{\nabla}\cdot(J\vec{W}).$$

- O operador divergente em coordenadas Cartesianas (x,y,z), cilíndricas (ρ,θ,z) e esféricas (r,θ,φ), de um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r}\,)$:

$$\begin{aligned}
\text{div}\vec{W} &= \vec{\nabla}\cdot\vec{W}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}W_x + \frac{\partial}{\partial y}W_y + \frac{\partial}{\partial z}W_z,\\
\text{div}\vec{W} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho W_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}W_\theta + \frac{\partial}{\partial z}W_z,\\
\text{div}\vec{W} &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 W_r\right) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}[\sin(\theta)W_\theta] + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}W_\varphi.
\end{aligned}$$

- O operador rotacional em coordenadas Cartesianas, (x,y,z), cilíndricas (ρ,θ,z) e esféricas (r,θ,φ), de um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r}\,)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{W} &= \vec{\nabla} \times \vec{W} \\
&= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}, \\
\mathrm{rot}\vec{W} &= \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \frac{1}{\rho}\,\partial_\theta & \partial_z \\ W_\rho & W_\theta & W_z \end{vmatrix} + \hat{z}\,\frac{1}{\rho}\,W_\theta, \\
\mathrm{rot}\vec{W} &= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\varphi} \\ \partial_r & \frac{1}{r}\,\partial_\theta & \frac{1}{r\sin(\theta)}\,\partial_\varphi \\ W_r & W_\theta & W_\varphi \end{vmatrix} + \hat{r}\,\frac{\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\,W_\varphi - \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\,W_\varphi + \hat{\varphi}\,\frac{1}{r}\,W_\theta.
\end{aligned}$$

- O operador Laplaciano em coordenadas Cartesianas, (x, y, z), cilíndricas (ρ, θ, z) e esféricas (r, θ, φ), de um campo escalar diferenciável até a segunda ordem $\phi(\vec{r})$:

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi, \\
\nabla^2\phi &= \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\,\frac{\partial}{\partial \rho}\phi\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi, \\
\nabla^2\phi &= \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\phi\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\phi\right] + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\phi.
\end{aligned}$$