

Física III - (noturno) - FGE211

Exame 2: 25/11/15

Nome: _____

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

- Ao entrar na sala da prova desligue o seu telefone celular, se estiver com um, e mantenha-o desligado até depois de deixar a sala. Desligue e guarde também mp3 players, CD players, DVD players, rádios, laptops, palmtops e quaisquer outros gadgets eletrônicos.
- Antes de começar a ler a prova coloque o seu nome *completo* nesta primeira folha de prova, que deverá ser devolvida com as folhas de resolução. Coloque o seu nome em *todas* as folhas de resolução, e entregue todas juntas e devidamente ordenadas, na ordem das questões, junto com esta primeira folha de prova.
- As questões e itens têm níveis diferentes de dificuldade, mas os itens têm todos o mesmo valor. Use as frentes e os versos de um conjunto de folhas de resolução *diferente* para cada questão. Solicite folhas de resolução adicionais, se for necessário. Não escreva no canto superior esquerdo das folhas, onde elas serão grampeadas.
- **Nunca coloque duas questões diferentes em uma mesma folha de resolução.**
- As respostas finais de cada questão devem estar escritas com *tinta*, e devem estar claramente marcadas nas folhas de resolução.
- Leia atentamente *todas* as questões antes de começar a prova, procurando entender com precisão o que é solicitado em cada uma.
- Esclareça quaisquer dúvidas que aparecerem sobre a proposição das questões, com o instrutor, logo no *início* da prova.
- Lembre-se de que frequentemente existe uma forma de fazer cada questão que é mais fácil e rápida do que a primeira que vem à mente, portanto não se precipite.
- Há um formulário disponível, que é distribuído junto com as folhas de prova. A menos deste formulário não é permitido fazer consultas de espécie alguma.
- Não é permitido o uso de calculadoras ou de computadores de qualquer tipo durante a prova.

QUESTÕES

- Um cilindro muito longo, feito de um material isolante, com base circular de raio r_0 , eletricamente carregado com uma densidade superficial de carga positiva σ_0 distribuída de forma homogênea em sua superfície, desloca-se ao longo do seu eixo, sem rotação, com uma velocidade constante e pequena v_0 . Considere que o eixo do cilindro seja o eixo z de um sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , e escreva os vetores em termos da respectiva base de versores $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ e \hat{z} .
 - Calcule a intensidade I da corrente elétrica devida ao movimento do cilindro.
 - Calcule o campo elétrico $\vec{E}(\rho, \theta, z)$ em todo o espaço.
 - Calcule o campo magnético $\vec{B}(\rho, \theta, z)$ em todo o espaço.
 - Calcule o vetor de Poynting $\vec{S}(\rho, \theta, z)$ em todo o espaço.
- Considere dois capacitores, um com capacitância C_1 e outro de capacitância $C_2 > C_1$, ambos inicialmente carregados com carga Q_0 . Os polos negativos estão interligados. No tempo $t = 0$ os dois polos positivos são interligados através de um resistor de resistência R suficientemente grande para que estejamos dentro das aproximações usuais para circuitos. Note-se que a carga total presente nas placas positivas dos capacitores é $2Q_0$.
 - Calcule a corrente $I(t)$ no resistor, para $t \geq 0$, orientada no sentido de C_1 para C_2 .
 - No limite $t \rightarrow \infty$, calcule a carga Q_1 no capacitor C_1 .
 - No limite $t \rightarrow \infty$, calcule a carga Q_2 no capacitor C_2 .
 - Calcule a energia total \mathcal{E}_T dissipada no resistor entre $t = 0$ e $t \rightarrow \infty$.
- Uma espira retangular de lados a_0 e b_0 , com resistência elétrica R_0 , atravessa uma região retangular onde há um campo magnético uniforme $\vec{B}_0 = B_0\hat{z}$ na direção do eixo z . O lado de comprimento a_0 está na direção \hat{x} do eixo x e o de comprimento b_0 na direção \hat{y} do eixo y . As dimensões da espira são menores do que as da região retangular, os lados da espira estão alinhados com os lados correspondentes da região, de forma que a espira chega a ficar completamente contida na região. A espira tem velocidade constante $\vec{v}_0 = v_0\hat{y}$. Escreva os vetores em termos da base de versores \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} .
 - Determine a corrente elétrica I_{in} que existe na espira enquanto ela está *entrando* na região onde existe o campo. Dê também o versor de orientação do circuito de acordo com a sentido da corrente.
 - Determine a corrente elétrica I_{out} que existe na espira enquanto ela está *saindo* na região onde existe o campo. Dê também o versor de orientação do circuito de acordo com a sentido da corrente.
 - Determine a força magnética \vec{F}_{in} que atua sobre a espira enquanto ela está *entrando* na região onde existe o campo.
 - Determine a força magnética \vec{F}_{out} que atua sobre a espira enquanto ela está *saindo* da região onde existe o campo.

4. Um fio condutor, cilíndrico, retilíneo, e muito longo, de raio r_0 e condutividade σ_0 , transporta uma corrente elétrica constante, de densidade $\vec{j} = j_0 \hat{z}$ uniformemente distribuída ao longo da sua seção transversal. Tome o eixo do cilindro como o eixo z de um sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) , e escreva os vetores em termos da respectiva base de versores $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ e \hat{z} .
- (a) Calcule o campo \vec{E} em todo o interior do cilindro.
 - (b) Calcule o campo \vec{B} em todo o interior do cilindro.
 - (c) Calcule o vetor de Poynting \vec{S} na superfície do cilindro.
 - (d) Calcule o fluxo Φ_S de \vec{S} através da superfície de um trecho do fio com comprimento ℓ_0 .

Formulário

Observação: este é um formulário de uso geral, que é distribuído junto com as provas; a inclusão de uma fórmula neste formulário não significa que ela necessariamente seja útil para algum dos problemas da prova.

- Forças eletromagnéticas sobre uma carga pontual q com velocidade \vec{v} :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

- Elemento de força magnética sobre um elemento de circuito de comprimento $d\ell$ carregando uma corrente I :

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

- Potencial elétrico de Coulomb, de uma carga pontual q em \vec{r}' :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

- Campo elétrico de Coulomb, de uma carga pontual q em \vec{r}' :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

- Lei de Biot-Savart para o potencial vetor e para o campo magnético, para um circuito C descrito por \vec{r}' e por $d\vec{\ell} = d\vec{r}'$ carregando uma corrente I :

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.\end{aligned}$$

- Forma local da lei de Ohm, para um material com condutividade σ :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

- Primeira equação da eletrostática, nas formas diferencial e integral:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \oint_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv.\end{aligned}$$

- Segunda equação da eletrostática, nas formas diferencial e integral:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}, \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= 0.\end{aligned}$$

- Primeira equação da magnetostática, nas formas diferencial e integral:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} &= 0.\end{aligned}$$

- Segunda equação da magnetostática, nas formas diferencial e integral:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}, \\ \oint_{C=\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 I_{\text{int}} \\ &= \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{a}.\end{aligned}$$

- Relação entre o campo elétrico e o potencial elétrico na eletrostática, nas formas diferencial e integral:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi, \\ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2).\end{aligned}$$

- Relação entre o campo magnético e o potencial vetor na magnetostática, na forma diferencial:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

- A equação da continuidade no caso estático, para $\vec{j}(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

- Momento magnético de um circuito plano de área S carregando uma corrente I :

$$\vec{m} = I\vec{S}.$$

- Definição do vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}.$$

- A definição geral do operador divergente de um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r})$:

$$\text{div} \vec{W} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \oint_{\delta S = \partial(\delta V)} \vec{W} \cdot d\vec{a}.$$

- A definição geral do operador rotacional de um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r})$:

$$\text{rot}\vec{W} = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\delta S} \oint_{\delta C = \partial(\delta S)} \vec{W} \cdot d\vec{\ell}.$$

- O teorema de Gauss para um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r})$:

$$\oint_{S=\partial V} \vec{W} \cdot d\vec{a} = \int_V \text{div}\vec{W} dv.$$

- O teorema de Stokes para um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r})$:

$$\oint_{C=\partial S} \vec{W} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \text{rot}\vec{W} \cdot d\vec{a}.$$

- O operador gradiente em coordenadas Cartesianas, cilíndricas e esféricas, de um campo escalar diferenciável $f(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}f &= (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f), \\ \vec{\nabla}f &= \left(\partial_\rho f, \frac{1}{r} \partial_\theta f, \partial_z f \right), \\ \vec{\nabla}f &= \left(\partial_r f, \frac{1}{r} \partial_\theta f, \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\phi f \right). \end{aligned}$$

- Fórmula geral para o operador divergente de um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r})$ em um sistema qualquer de coordenadas curvilíneas ortogonais, onde J é o determinante Jacobiano que aparece no elemento de volume deste sistema de coordenadas:

$$\text{div}\vec{W} = \frac{1}{J} \vec{\nabla} \cdot (J\vec{W}).$$

- O operador divergente em coordenadas Cartesianas (x, y, z) , cilíndricas (ρ, θ, z) e esféricas (r, θ, ϕ) , de um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{W} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{W} \\ &= \partial_x W_x + \partial_y W_y + \partial_z W_z, \\ \text{div}\vec{W} &= \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho W_\rho) + \frac{1}{\rho} \partial_\theta W_\theta + \partial_z W_z, \\ \text{div}\vec{W} &= \frac{1}{r^2} \partial_\rho(r^2 W_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\theta[\sin(\theta) W_\theta] + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\phi W_\phi. \end{aligned}$$

- O operador rotacional em coordenadas Cartesianas (x, y, z) , cilíndricas (ρ, θ, z) e esféricas (r, θ, ϕ) , de um campo vetorial diferenciável $\vec{W}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned}
\text{rot}\vec{W} &= \vec{\nabla} \times \vec{W} \\
&= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}, \\
\text{rot}\vec{W} &= \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ \partial_\rho & \frac{1}{\rho} \partial_\theta & \partial_z \\ W_\rho & W_\theta & W_z \end{vmatrix} + \hat{z} \frac{1}{\rho} W_\theta, \\
\text{rot}\vec{W} &= \begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ \partial_r & \frac{1}{r} \partial_\theta & \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\phi \\ W_r & W_\theta & W_\phi \end{vmatrix} + \hat{r} \frac{\cos(\theta)}{r \sin(\theta)} W_\phi - \hat{\theta} \frac{1}{r} W_\phi + \hat{\phi} \frac{1}{r} W_\theta.
\end{aligned}$$